В. И. СМИРНОВ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ I

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава II

ПОНЯТИЕ О ПРОИЗВОДНОЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Глава III

ПОНЯТИЕ ОБ ИНТЕГРАЛЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Глава IV

РЯДЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

Глава V

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава VI

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, НАЧАЛА ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ВОСЬМОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание весьма существенно отличается от предыдущего. Из книги исключен материал, относящийся к аналитической геометрии. В связи с этим пришлось сделать перегруппировку оставшегося материала. В частности, все имеющиеся в настоящем томе приложения дифференциального исчисления к геометрии собраны в § 7 (глава II). Далее, в первый том отнесена глава, посвященная комплексным числам, основным свойствам целых многочленов и систематическому интегрированию функций. Прежде она была главой I второго тома.

Не останавливаясь на мелких добавлениях и изменениях в изложении, мы укажем на существенные добавления. Принимая во внимание, что в следующих томах приходится встречаться с довольно тонкими и сложными вопросами современного анализа, мы сочли полезным в конце § 2 (глава I) после изложения теории пределов поместить изложение теории иррациональных чисел и ее применений к доказательству признаков существования предела и свойств непрерывных функций. Там же мы приводим строгое определение и исследование свойств элементарных функций. В главе V, посвященной функциям нескольких переменных, мы приводим доказательство существования неявных функций.

Изложение ведется таким образом, что крупный шрифт может читаться самостоятельно. В мелкий шрифт отнесены примеры, некоторые отдельные дополнительные вопросы, а также весь тот теоретический материал, о котором мы упоминали выше, и последние параграфы главы IV, также содержащие дополнительный теоретический материал более сложного характера.

Профессор Г. М. Фихтенгольц сделал мне ряд ценных указаний в отношении изложения, которыми я воспользовался при окончательной редакции этой книги. Считаю своим приятным долгом выразить ему мою глубокую благодарность.

В. Смирнов

ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТНАДЦАТОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании основной текст и весь план книги остались без перемены, но был сделан ряд изменений, касающихся точности и полноты изложения. Особенно это коснулось вопросов применения дифференциального и интегрального исчисления к геометрии.

В. Смирнов

ГЛАВА I

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

§ 1. ПЕРЕМЕННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Величина и ее измерение. Математический анализ имеет основное значение в точном естествознании. В отличие от остальных наук, из которых каждая интересуется лишь некоторой определенной стороной окружающего нас мира, математика имеет дело с самыми общими свойствами, присущими всем доступным для научного исследования явлениям.

Одним из основных понятий является понятие о *величине и ее измерении*. Характерное свойство величины заключается в том, что она может быть измерена, т. е. тем или иным путем сравнена с некоторой определенной величиной того же рода, которая принимается *за единицу меры*. Самый процесс сравнения зависит от свойства исследуемой величины и называется измерением. В результате измерения получается *отвлеченное число*, выражающее отношение рассматриваемой величины к величине, принятой за единицу меры.

Всякий закон природы дает нам соотношение между величинами или, вернее, между числами, выражающими эти величины. Предметом исследования математики и являются как раз числа и различные соотношения между ними, независимо от конкретного характера тех величин или законов, которые привели нас к этим числам и соотношениям.

Итак, *каждой величине соответствует измеряющее ее отвлеченное число*. Но число это существенно зависит от принятой при измерении единицы или *масштаба*. При увеличении этой единицы будет уменьшаться число, измеряющее данную величину, и, обратно, число это будет увеличиваться при уменьшении единицы.

Выбор масштаба обусловливается характером исследуемой величины и обстоятельствами, при которых производится измерение. Величина масштаба при измерении одной и той же величины может меняться в самых широких пределах, — например, при измерении *длины* в точных оптических исследованиях принимают за единицу длины один *ангстрем* (одну десятимиллионную долю миллиметра,

10^{-10} *м*); в астрономии же употребительна единица длины, называемая *световым годом*, т. е. пространство, проходимое светом в течение одного года (за одну секунду свет проходит, примерно, 300 000 *км*).

2. Число. Число, которое получается в результате измерения, может быть *целым* (если единица содержится целое число раз в рассматриваемой величине), *дробным* (если существует другая единица, которая содержится целое число раз как в измеряемой величине, так и в выбранной раньше единице, — короче, когда измеряемая величина *соизмерима* с единицей меры) и, наконец, *иррациональным* (когда такой общей меры не существует, т. е. данная величина оказывается *несоизмеримой* с единицей меры).

Так, например, в элементарной геометрии доказывается, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной, так что, если мы будем измерять диагональ квадрата, приняв за единицу длины его сторону, то полученное при измерении число $\sqrt{2}$ будет иррациональным. Иррациональным же оказывается и число π, измеряющее длину окружности, диаметр которой принят за единицу.

Для уяснения понятия об иррациональном числе полезно обратиться к десятичным дробям. Всякое рациональное число, как известно из арифметики, может быть представлено или в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной десятичной дроби, причем в последнем случае бесконечная дробь будет периодической (чистой периодической или смешанной периодической). Так, например, производя деление числителя на знаменатель по правилу деления десятичных дробей, мы получим:

$$\frac{5}{33} = 0{,}151515\ldots = 0{,}(15),$$

$$\frac{5}{18} = 0{,}2777\ldots = 0{,}2(7).$$

Наоборот, как известно из арифметики, всякая периодическая десятичная дробь выражает рациональное число.

При измерении величины, несоизмеримой с принятой единицей, мы можем сначала подсчитать, сколько раз полная единица заключается в измеряемой величине, затем сколько раз десятая доля единицы заключается в полученном остатке величины, затем сколько раз сотая доля единицы заключается в новом остатке и т. д. Таким путем при измерении величины, несоизмеримой с единицей, будет образовываться некоторая бесконечная непериодическая десятичная дробь. Всякому иррациональному числу соответствует такая бесконечная дробь и, наоборот, всякой бесконечной непериодической десятичной дроби соответствует некоторое иррациональное число. Если в этой бесконечной десятичной дроби оставить лишь несколько первых десятичных знаков, то получится приближенное значение по недостатку иррационального числа, представляемого этой дробью.

Так, например, извлекая квадратный корень по обычному правилу до третьего десятичного знака, получим:

$$\sqrt{2} = 1{,}414 \ldots .$$

Числа 1,414 и 1,415 будут приближенными значениями $\sqrt{2}$ с точностью до одной тысячной по недостатку и по избытку.

Пользуясь десятичными знаками, можно иррациональные числа сравнивать по величине друг с другом и с рациональными числами.

Во многих случаях приходится рассматривать величины разных знаков: положительные и отрицательные (температура выше и ниже 0°, положительная и отрицательная скорости движения по прямой и т. п.). Такие величины выражаются соответственно положительными и отрицательными числами. Если a и b — положительные числа и $a > b$, то $-a < -b$, и любое положительное число, включая нуль, больше любого отрицательного числа.

Все рациональные и иррациональные числа располагаются в некотором определенном порядке по своей величине. Все эти числа образуют совокупность *вещественных чисел.*

Отметим одно обстоятельство, связанное с представлением вещественных чисел десятичными дробями. Вместо любой конечной десятичной дроби мы можем написать бесконечную десятичную дробь с девяткой в периоде. Так, например: $3{,}16 = 3{,}1599\ldots$ Если не пользоваться конечными десятичными дробями, то получится точное биоднозначное соответствие между вещественными числами и бесконечными десятичными дробями, т. е. всякому вещественному числу, кроме нуля, соответствует определенная бесконечная десятичная дробь и всякой бесконечной десятичной дроби соответствует определенное вещественное число. Отрицательным числам соответствуют бесконечные десятичные дроби с предшествующим им знаком минус.

В области вещественных чисел выполнимы первые четыре действия, кроме деления на нуль. Корень нечетной степени из любого вещественного числа имеет всегда одно определенное значение. Корень четной степени из положительного числа имеет два значения, которые различаются только знаком. Корень четной степени из отрицательного вещественного числа не имеет смысла в области вещественных чисел. Строгая теория вещественных чисел и действий над ними будет нами изложена в [**40**] мелким шрифтом.

Арифметическим или абсолютным значением данной величины называется выражающее ее число, взятое со знаком $+$. Абсолютное значение величины, выражаемой числом a, или, иначе говоря, абсолютное значение числа a, обозначается символом $|a|$. Таким образом, мы имеем:

$$|a| = a, \quad \text{если } a \text{ есть число положительное,}$$
$$|a| = -a, \quad \text{если } a \text{ есть число отрицательное.}$$

Нетрудно доказать, что абсолютное значение суммы, $|a+b|$, будет равняться сумме абсолютных значений слагаемых, $|a|+|b|$,

только в том случае, когда эти слагаемые имеют одинаковый знак, в противном же случае оно будет меньше, так что

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

Так, например, абсолютное значение суммы чисел $(+3)$ и (-7) равно четырем, а сумма абсолютных значений слагаемых равна десяти.

Точно так же можно показать, что

$$|a-b| \geqslant |a|-|b|,$$

причем считается, что $|a| \geqslant |b|$.

Абсолютное значение произведения любого числа сомножителей равно произведению абсолютных значений этих сомножителей и абсолютное значение частного равно частному абсолютных значений делимого и делителя, т. е.

$$|abc| = |a| \cdot |b| \cdot |c| \quad \text{и} \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

3. Величины постоянные и переменные. Величины, исследуемые в математике, разделяются на два класса: *постоянные* и *переменные*.

Постоянной величиной называется величина, которая при данном исследовании сохраняет одно и то же, неизменное, значение; переменной величиной — такая, которая по тем или иным причинам может принимать различные значения при данном исследовании.

Из этих определений ясно, что понятие о постоянной и переменной величине в значительной мере условно и зависит от обстоятельств, при которых изучается данное явление. Одна и та же величина, которая при одних условиях могла рассматриваться как постоянная, при других условиях может стать переменной, и наоборот.

Так, например, при измерении веса тел важно знать, производится ли взвешивание в одном и том же месте земной поверхности или в разных: если измерение производится в одном и том же месте, то ускорение силы тяжести, от которой и зависит вес, будет оставаться величиной постоянной, и различие в весе между разными телами будет зависеть только от их массы; если же измерения производятся в разных местах земной поверхности, то ускорение силы тяжести не может считаться постоянным, так как оно зависит от центробежной силы вращения Земли; благодаря этому одно и то же тело на экваторе весит меньше, чем на полюсе, что и можно обнаружить, если производить взвешивание не на рычажных, а на пружинных весах.

Равным образом при грубых технических расчетах можно считать, что длина входящих в конструкцию стержней есть величина неизменная; при более же точных, когда приходится принимать во внимание действие изменения температуры, длина стержней оказывается переменной, что, конечно, значительно усложняет все расчеты.

4. Промежуток. Характер изменения переменной величины может быть самым разнообразным. Переменная величина может принимать либо всевозможные вещественные значения, без всяких ограничений (например время t, отсчитываемое от некоторого определенного начального момента, может принимать всевозможные, как положительные, так и отрицательные, значения), либо значения ее ограничиваются некоторыми *неравенствами* (например абсолютная температура T°, которая должна быть больше -273°С); наконец, переменная величина может принимать лишь некоторые, а не всевозможные значения (только целые — число жителей данного города, число молекул в данном объеме газа — или только соизмеримые с данной единицей и т. п.).

Укажем некоторые, наиболее распространенные в теоретических исследованиях и на практике способы изменения переменных величин.

Если переменная величина x может принимать все вещественные значения, удовлетворяющие условию $a \leqslant x \leqslant b$, где a и b — заданные вещественные числа, то говорят, что *x изменяется в промежутке* (a, b). Такой промежуток, со включенными концами, называют иногда *замкнутым промежутком*. Если переменная x может принимать все значения из промежутка (a, b), кроме его концов, т. е. $a < x < b$, то говорят, что *x изменяется внутри промежутка* (a, b). Такой промежуток с исключенными концами называется *открытым промежутком*. Кроме того, областью изменения x может быть и промежуток, замкнутый с одной стороны и открытый с другой: $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$.

Если область изменения x определяется неравенством $a \leqslant x$, то говорят, что x изменяется в промежутке $(a, +\infty)$, который замкнут слева и открыт справа. Точно так же при неравенстве $x \leqslant b$ мы имеем промежуток $(-\infty, b)$, открытый слева и замкнутый справа. Если x может принимать любые вещественные значения, то говорят, что x изменяется в промежутке $(-\infty, +\infty)$, открытом с обеих сторон.

5. Понятие о функции. Чаще всего в приложениях приходится иметь дело не с одной переменной величиной, а с несколькими сразу.

Возьмем, например, некоторое количество, хотя бы 1 *кг*, воздуха; переменные величины, определяющие его состояние, будут: давление p (*кг/м*^{2}), под которым он находится; объем v (*м*^{3}), который он занимает; температура его t°С. Предположим пока, что температура воздуха поддерживается равной 0°С; число t есть в данном случае постоянная, равная нулю. Остаются только переменные p и v. Если менять давление p, то будет меняться и объем v, например, если воздух будем сжимать, то объем будет уменьшаться. Давление p мы можем при этом менять произвольно (по крайней мере, в пределах, доступных для техники), а потому мы можем называть p *независимой переменной*; при каждой величине давления газ,

очевидно, должен занимать вполне определенный объем; стало быть должен существовать такой закон, который позволяет при каждом значении p найти соответствующее ему значение v. Этот закон хорошо известен — это закон Бойля — Мариотта, который гласит, что объем, занимаемый газом при постоянной температуре, обратно пропорционален давлению.

Применяя этот закон к нашему килограмму воздуха, можно найти зависимость между v и p в виде *уравнения*

$$v = \frac{273 \cdot 29{,}27}{p}.$$

Переменная величина v называется в данном случае *функцией* независимой переменной p.

Отвлекаясь от этого частного примера, мы можем сказать, что, теоретически говоря, *для независимой переменной характерным является множество ее возможных значений, и мы можем по произволу выбирать для нее любое значение из этого множества ее возможных значений*. Так, например, множеством значений независимой переменной x может служить какой-либо промежуток (a, b) или внутренность этого промежутка, т. е. независимая переменная x может, например, принимать любые значения, удовлетворяющие неравенству $a \leqslant x \leqslant b$ или неравенству $a < x < b$. Может случиться, что x принимает любые целочисленные значения и т. д. В указанном выше примере роль независимой переменной играло p, и объем v был функцией p. Дадим теперь теоретическое определение функции.

Определение. *Величина y называется функцией независимой переменной x, если любому определенному значению x (из множества ее возможных значений) соответствует определенное значение y.*

Если, например, y есть функция от x, определенная в промежутке (a, b), то это значит, что любому значению x из этого промежутка соответствует определенное значение y.

Вопрос о том, какую из двух величин, x или y, считать независимой переменной, есть часто вопрос только удобства. В нашем примере мы могли бы, меняя произвольно объем v и определяя каждый раз давление p, считать независимой переменной v, а давление p рассматривать как функцию от v. Решая написанное выше уравнение относительно p, получим формулу, выражающую функцию p через независимую переменную:

$$p = \frac{273 \cdot 29{,}27}{v}.$$

Сказанное о двух переменных без труда распространяется и на случай какого угодно числа переменных; и здесь мы можем отличить *переменные независимые от зависимых*, или *функций*.

Возвращаясь к нашему примеру, положим, что температура не будет уже $0° C$, а может меняться. Закон Бойля — Мариотта должен быть при этом заменен более сложной зависимостью Клапейрона:

$$pv = 29{,}27\,(273 + T),$$

которая показывает, что при изучении состояния газа можно менять произвольно лишь две из величин p, v и T, а третья будет полностью определена, если даны значения этих двух. Мы можем принять за независимые переменные, например, p и T, тогда v будет функцией от них:

$$v = \frac{29{,}27\,(273 + T)}{p},$$

либо же независимыми переменными можно считать v и T, а p будет функцией от них.

Приведем другой пример. Площадь S треугольника выражается через длины сторон a, b, c по формуле:

$$S = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)},$$

где p — полупериметр треугольника:

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$

Стороны a, b, c можно менять произвольно, лишь бы только каждая сторона была больше разности и меньше суммы двух других. Таким образом, переменные a, b, c *будут независимыми переменными, ограниченными неравенствами*, S — *функцией от них.*

Мы можем также задать произвольно две стороны, например a, b, и площадь S треугольника; пользуясь формулой:

$$S = \frac{1}{2}\,ab \sin C,$$

где C — угол между сторонами a, b, мы можем тогда вычислить C. Здесь уже величины a, b, S будут независимыми переменными, C — функцией. При этом переменные a, b, S должны быть ограничены неравенством:

$$\sin C = \frac{2S}{ab} \leqslant 1.$$

Следует заметить, что в этом примере мы получаем для C *два значения,* смотря по тому, возьмем ли мы для C острый или тупой из двух углов, имеющих один и тот же синус

$$\sin C = \frac{2S}{ab}.$$

Мы приходим здесь к понятию о *многозначной функции*, о котором подробнее будем говорить ниже.

6. Аналитический способ изображения функциональной зависимости. Всякий закон природы, дающий связь одних явлений с другими, устанавливает *функциональную зависимость* между величинами.

Существует много способов для изображения функциональных зависимостей, но самое важное значение имеют три способа: 1) *аналитический*, 2) *способ таблиц* и 3) *графический*, или *геометрический*.

Мы говорим, что функциональная зависимость между величинами или, проще, *функция изображена аналитически*, если величины эти связаны между собой *уравнениями*, в которые они входят, подвергаясь различным математическим операциям: сложению, вычитанию, делению, логарифмированию и т. д. К аналитическому изображению функций мы приходим всегда, когда исследуем вопрос *теоретически*, т. е., установив основные предпосылки, мы применяем математический анализ и получаем результат в виде некоторой математической формулы; например, в небесной механике всевозможные движения, положения и взаимодействия небесных светил выводятся из одного основного закона — всемирного тяготения.

Если мы имеем непосредственное выражение функции (т. е. зависимой переменной) при помощи математических действий над другими, независимыми, переменными, то говорят, что функция аналитически задана явно. Примером явного задания функции может служить выражение объема газа v при постоянной температуре через давление (явная функция одной независимой переменной):

$$v = \frac{273 \cdot 29{,}27}{p}$$

или выражение площади S треугольника через стороны:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(явная функция от трех независимых переменных). Выпишем еще пример явного задания функции от одной независимой переменной x:

$$y = 2x^2 - 3x + 7. \qquad (1)$$

Часто бывает неудобно или невозможно выписывать формулу, которая выражает функцию через независимые переменные. При этом пишут коротко так:

$$y = f(x).$$

Эта запись обозначает, что y есть функция независимой переменной x и f есть символический знак зависимости y от x. Вместо f можно, конечно, употреблять и другие буквы. Если мы рассматриваем разные функции от x, то должны употреблять и разные буквы для символической записи зависимости от x:

$$f(x),\ F(x),\ \varphi(x) \text{ и т. д.}$$

Такой символической записью пользуются не только в том случае, когда функция задана аналитически, но и в самом общем случае функциональной зависимости, который мы определили в [5].

Аналогичной короткой записью пользуются и для функций от нескольких независимых переменных:

$$v = F(x, y, z).$$

Здесь v есть функция переменных x, y, z.

Частное значение функции получим, придав независимым переменным частные же значения и выполнив действия, указанные знаками f, $F, \ldots$ Так, например, частное значение функции (1) при $x = \frac{1}{2}$ будет:

$$y = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 7 = 6.$$

Вообще частное значение некоторой функции $f(x)$ при $x = x_0$ обозначается $f(x_0)$. Аналогично — для функций от нескольких переменных.

Не надо смешивать общего понятия функции, которое было нами дано в [5], с понятием аналитического выражения y через x. В общем определении функции говорится лишь о некотором законе, согласно которому любому значению переменной x из множества ее возможных значений соответствует определенное значение y. При этом не предполагается никакое аналитическое выражение (формула) y через x. Отметим еще, что можно определить функцию различными аналитическими выражениями на разных участках изменения независимой переменной x. Так, например, мы можем определить функцию y на промежутке (0, 3) следующим образом: $y = x + 5$ при $0 \leqslant x \leqslant 2$ и $y = 11 - 2x$ при $2 < x \leqslant 3$. При таком задании любому значению x из промежутка (0, 3) соответствует определенное значение y, что и соответствует определению функции.

7. Неявные функции. Функция называется ***неявной***, если мы имеем не непосредственное аналитическое выражение ее через переменные независимые, а только *уравнение*, которое связывает ее значение со значениями переменных независимых. Так, например, если переменная величина y связана с переменной величиной x уравнением

$$y^3 - x^2 = 0,$$

то y есть ***неявная*** функция независимой переменной x; с другой стороны, можно и x считать неявной функцией независимой переменной y.

Неявная функция v от нескольких независимых переменных x, y, z, ... определяется вообще из *уравнения*

$$F(x, y, z, \ldots, v) = 0.$$

Вычислять значения этой функции мы можем лишь тогда, когда разрешим уравнение относительно v и тем самым представим v в виде явной функции от $x, y, z, \ldots$:

$$v = \varphi(x, y, z, \ldots).$$

В приведенном выше примере y выражается через x в виде:

$$y = \sqrt[3]{x^2}.$$

Однако для получения различных свойств функции v совсем нет необходимости решать уравнение, и очень часто бывает, что удается достаточно хорошо изучить неявную функцию по самому уравнению, которым она определяется, не решая его.

Например, объем газа v есть неявная функция давления p и температуры T, определяемая уравнением

$$pv = R(273 + T).$$

Угол C между сторонами a и b треугольника площади S есть неявная функция a, b и S, определяемая уравнением

$$ab \sin C = 2S.$$

8. Табличный способ. Аналитический способ представления функций применяется главным образом при теоретических исследованиях, когда дело идет об общих законах. На практике же, когда приходится на самом деле вычислять много частных значений различных функций, аналитический способ представления часто оказывается неудобным, так как он требует в каждом случае производства всех необходимых вычислений.

Чтобы избежать этого, вычисляются частные значения наиболее употребительных функций, при большом числе частных значений независимых переменных, и составляются *таблицы*.

Таковы, например, таблицы значений функций:

$$y = x^2;\ \frac{1}{x};\ \sqrt{x};\ \pi x;\ \frac{1}{4}\pi x^2;\ \log_{10} x;\ \log_{10} \sin x;\ \log_{10} \cos x \text{ и т. д.},$$

с которыми постоянно приходится иметь дело на практике. Существуют и другие таблицы, более сложных функций, которые тоже приносят большую пользу: таблицы бесселевых функций, эллиптических и т. д. Существуют таблицы и для функций от нескольких переменных, простейший пример которых представляет обыкновенная *таблица умножения*, т. е. таблица значений функции $z = xy$ при различных целых значениях x и y.

Иногда приходится вычислять значения функций при таких частных значениях переменных независимых, которых в таблицах нет, а есть только соседние к ним значения; для того, чтобы можно было

пользоваться таблицами и в этом случае, существуют различные правила *интерполяции;* одно из таких правил было дано еще в курсе средней школы при пользовании таблицами логарифмов (partes proportionales).

Важное значение имеют таблицы тогда, когда при их помощи изображаются функции, аналитическое выражение которых нам *неизвестно;* с этим приходится иметь дело, когда производится *эксперимент.* Всякое опытное исследование имеет целью обнаружить скрытые для нас функциональные зависимости, и результат всякого опыта представляется в виде *таблицы*, связывающей между собой различные значения исследуемых при этом опыте величин.

9. Графический способ изображения чисел. Переходя к графическому способу изображения функциональной зависимости, мы начнем со случая графического изображения одной переменной.

Всякое число x может быть изображено некоторым отрезком. Для этого достаточно, условившись раз навсегда в выборе единицы длины, построить отрезок, длина которого равна как раз данному числу x. Таким образом, всякая величина не только может быть выражена *числом*, но также и геометрически изображена *отрезком.*

Для того чтобы можно было таким путем изобразить и отрицательные числа, условимся откладывать отрезки на одной и той же прямой линии, приписав ей притом определенное направление (черт. 1). Условимся, далее, обозначать всякий отрезок знаком $\overline{AB}$, причем точку A будем называть началом, B — концом отрезка.

Черт. 1.

Если направление от A к B совпадает с направлением прямой, отрезок изображает число положительное; если же направление от A к B противоположно направлению прямой, то отрезок изобразит число отрицательное (A_1B_1 на черт. 1). *Абсолютное* же значение рассматриваемого числа выражается д л и н о й изображающего его о т р е з к а независимо от направления.

Длину отрезка $\overline{AB}$ будем обозначать через $|\overline{AB}|$; если отрезок $\overline{AB}$ изображает число x, то будем писать просто

$$x = \overline{AB}; \quad |x| = |\overline{AB}|.$$

Черт. 2.

Для большей определенности можно раз навсегда условиться помещать начало всех отрезков в заранее выбранную точку O прямой. Тогда всякий отрезок $\overline{OA}$, а потому и изображаемое им число x, будет вполне определяться *точкой* A, концом отрезка (черт. 2). Обратно, задав число x, можем и по величине и по направлению определить отрезок $\overline{OA}$, а потому — и конец его A.

Итак, *если проведем в определенном направлении прямую $X'X$ (ось) и отметим на ней неподвижную точку O (начало), то каждому вещественному числу x будет соответствовать определенная точка A этой прямой, такая, что отрезок $\overline{OA}$ измеряется числом x. Обратно, всякой точке A оси соответствует вполне определенное вещественное число x, измеряющее отрезок $\overline{OA}$. Это число x называется абсциссой точки A; если нужно указать, что точка A имеет абсциссу x, то пишут $A(x)$.*

Если число x меняется, то изображающая его точка A передвигается по оси. Установленное выше понятие о промежутке при таком *графическом изображении числа x* становится совершенно наглядным, а именно: если x меняется в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, то соответствующая точка на оси $X'X$ может находиться в отрезке, концы которого имеют абсциссы a и b.

Если бы мы ограничились одними рациональными числами, то точке A не соответствовало бы никакой абсциссы, если отрезок $\overline{OA}$ несоизмерим с принятой единицей, т. е., иначе говоря, одни рациональные числа не заполняют всех точек прямой. Это заполнение достигается введением иррациональных чисел. Основным положением при графическом изображении одной переменной величины является указанное выше положение: всякой точке оси $X'X$ соответствует определенное вещественное число и, наоборот, всякому вещественному числу соответствует определенная точка оси $X'X$.

Возьмем на оси $X'X$ две точки: точку A_1 с абсциссою x_1 и точку A_2 с абсциссою x_2. При этом отрезку $\overline{OA_1}$ будет соответствовать число x_1, а отрезку $\overline{OA_2}$ — число x_2. Нетрудно показать, рассматривая всевозможные взаимные расположения точек A_1 и A_2, что отрезку $\overline{A_1A_2}$ будет соответствовать число $(x_2 - x_1)$, так что длина этого отрезка будет равна абсолютному значению разности $(x_2 - x_1)$:

$$|\overline{A_1A_2}| = |x_2 - x_1|.$$

Если, например, $x_1 = -3$ и $x_2 = 7$, то точка A_1 лежит слева от O на расстоянии, равном 3, а точка A_2 лежит справа от O на расстоянии, равном 7. Отрезок $\overline{A_1A_2}$ будет иметь длину 10 и будет направлен так же, как ось $X'X$, т. е. ему будет соответствовать число $10 = 7 - (-3) = x_2 - x_1$. Предоставляем читателю разобрать другие возможности расположения точек A_1 и A_2.

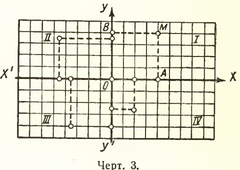
10. Координаты. Выше мы видели, что положение точки на прямой $X'X$ может быть определено вещественным числом x. Покажем теперь аналогичный способ определения положения точки на плоскости.

Проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные оси $X'X$ и $Y'Y$ и возьмем за начало на каждой из них их точку пересечения O (черт. 3). Положительные направления на осях указаны стрел-

ками. Точкам оси $X'X$ соответствуют вещественные числа, которые мы обозначим буквой x. Точкам оси $Y'Y$ также соответствуют вещественные числа, которые мы будем обозначать буквой y. Если нам заданы определенные значения x и y, то мы имеем определенные точки A и B на осях $X'X$ и $Y'Y$; зная точки A и B, можем построить точку M пересечения прямых, параллельных осям и проведенных через точки A и B.

Каждой паре значений величин x, y соответствует одно вполне определенное положение точки M на плоскости чертежа.

Обратно, каждой точке M плоскости соответствует вполне определенная пара значений величин x, y, отвечающих точкам пересечения A, B прямых, проведенных через точку M параллельно осям, с осями $X'X$ и $Y'Y$.



Черт. 3.

При указанных на черт. 3 направлениях осей $X'X$, $Y'Y$ надо x считать положительным, если точка A лежит направо, и отрицательным, если она лежит налево от точки O; y будет положительным, если точка B лежит сверху, отрицательным — если снизу от O.

Величины x, y, определяющие положение точки M на плоскости и в свою очередь определяемые положением точки M, называются координатами точки M. Оси $X'X$, $Y'Y$ называются координатными осями, плоскость чертежа — координатной плоскостью XOY, точка O — началом координат.

Величина x называется абсциссой, y — ординатой точки M. Задавая точку M ее координатами, пишут:

$$M(x,\ y).$$

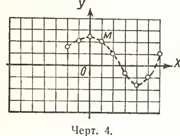
Самый способ изображения называется способом прямоугольных координат.

Знаки координат точки M при различных ее положениях в различных координатных углах (I—IV) (черт. 3) можно представить такой таблицей:

M	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

Совершенно ясно, что координаты x, y точки M равны *расстояниям* точки M до осей координат, взятых с соответствующими знаками.

11. График и уравнение кривой. Возвратимся к величинам x и y, которые изображает точка M. Пусть x и y связаны функциональной зависимостью; это значит, что, меняя по произволу x (или y), мы будем получать каждый раз соответствующее значение y (или x). Каждой такой паре значений x и y соответствует определенное положение точки M на плоскости XOY; если же значения эти будут меняться, то точка M будет передвигаться по плоскости и при движении своем опишет некоторую линию (черт. 4), которая называется *графическим изображением* (или, проще, *графиком* или *диаграммой*) *рассматриваемой функциональной зависимости.*



Черт. 4.

Если зависимость была задана *аналитически* в виде *уравнения* в явной форме:

$$y = f(x)$$

или в неявной форме:

$$F(x, y) = 0,$$

то уравнение это называется *уравнением кривой*, а кривая — *графиком уравнения.* Кривая и ее уравнение суть лишь различные способы выражения одной и той же функциональной зависимости, т. е. *все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению кривой, лежат на этой кривой и, обратно, координаты всех точек, лежащих на кривой, удовлетворяют ее уравнению.*

Если дано уравнение кривой, можно, пользуясь листом графленой бумаги, построить, более или менее точно, самую кривую (вернее, можно построить *какое угодно число точек*, лежащих на этой кривой); чем больше таких точек построим, тем яснее будет для нас форма кривой; такой способ называется *построением кривой по точкам.*

Выбор *масштаба* имеет существенное значение при построении кривых; при этом можно выбирать *разные* масштабы при построении x и y. При одинаковых масштабах для x и y плоскость уподобляется листу бумаги, разграфленному на *квадраты*, при разных же масштабах — на *прямоугольники.* В дальнейшем будет подразумеваться, что масштабы для x и y одинаковы.

Читателям рекомендуется здесь же построить по точкам несколько графиков простейших функций, меняя притом масштабы для x и y.

Введенные выше понятия о координатах точки M, об уравнении кривой и графике уравнения устанавливают тесную связь между

алгеброй и геометрией. С одной стороны, мы получаем возможность наглядным геометрическим путем изображать и исследовать аналитические зависимости, с другой стороны, оказывается возможным сводить решение геометрических вопросов к чисто алгебраическим действиям, в чем и заключается основная задача *аналитической геометрии,* разработанной впервые Декартом.

Ввиду чрезвычайной важности формулируем еще раз факты, лежащие в основе аналитической геометрии. Если на плоскости отметить две координатные оси, то *всякой точке плоскости будет соответствовать пара вещественных чисел — абсцисса и ордината этой точки, и, наоборот, всякой паре чисел будет соответствовать определенная точка плоскости, имеющая первое число своей абсциссой и второе число своей ординатой. Кривой на плоскости соответствует функциональная зависимость между x и y, или, что то же, уравнение, содержащее переменные x и y, которое удовлетворяется в том и лишь в том случае, если вместо x и y подставить координаты какой-либо из точек кривой. Наоборот, уравнению, содержащему две переменные x и y, соответствует кривая, состоящая из тех точек плоскости, координаты которых, будучи подставлены вместо x и y в уравнение, удовлетворяют ему.*

Мы обратимся теперь к изучению графиков простейших функций. Заметим еще раз, что если имеется функциональная зависимость, данная уравнением в явной или неявной форме:

$$y=f(x) \text{ или } F(x, y)=0,$$

то соответствующая этому уравнению кривая на плоскости осей $X'X$, $Y'Y$ называется *графиком уравнения* или *графиком функции,* определяемой этим уравнением. Абсциссы и ординаты точек этого графика дают соответствующие друг другу значения переменных x и y, связанных функциональной зависимостью.

Построение графика совершается автоматически в самопишущих приборах; переменной x является обыкновенно время, y — величина, изменение которой с течением времени нас интересует, например барометрическое давление (барограф), температура (термограф). Важное значение имеет индикатор, который записывает зависимость между объемом и давлением газа, заключенного в цилиндре парового или газового двигателя.

12. Линейная функция. Простейшая из функций, которая вместе с тем имеет и наиболее важные приложения, — *двучлен первой степени*

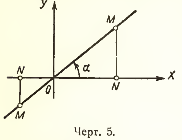
$$y=ax+b, \tag{2}$$

где a и b — данные постоянные числа. Мы увидим, что график этой функции есть прямая линия. Она называется также *линейной функцией.* Рассмотрим сначала тот случай, когда число b равно нулю. При этом функция имеет вид:

$$y=ax. \tag{3}$$

Она выражает тот факт, что переменная y прямо пропорциональна переменной x, причем постоянный коэффициент a называется коэффициентом пропорциональности.

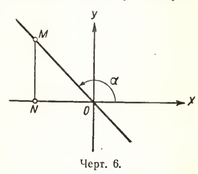
Обращаясь к чертежу (черт. 5), мы видим, что уравнение (3) выражает следующее геометрическое свойство исследуемого графика: какую бы точку M на нем мы ни взяли, отношение ординаты $y = \overline{NM}$ этой точки к ее абсциссе $x = \overline{ON}$ есть постоянная величина a. Так как, с другой стороны, это отношение равно тангенсу угла α, образуемого отрезком $\overline{OM}$ с осью $\overline{OX}$, то отсюда видно, что геометрическое место точек M есть *прямая, проходящая через начало координат O* под углом α (или $\pi + \alpha$) к оси X.



Черт. 5.

Мы считаем α от оси OX до прямой против часовой стрелки.

Одновременно с этим обнаруживается и важное геометрическое значение коэффициента a в уравнении (3): *a есть тангенс угла α, который образует прямая, соответствующая этому уравнению, с осью OX,* вследствие чего a называется *угловым коэффициентом прямой*. Заметим, что если a — число отрицательное, то угол α будет тупой и соответствующая прямая будет расположена так, как указано на черт. 6.



Черт. 6.

Обратимся теперь к общему случаю линейной функции, а именно к уравнению (2). Ординаты y графика этого уравнения отличаются от соответствующих ординат графика уравнения (3) постоянным слагаемым b. Таким образом, мы получим непосредственно график уравнения (2), если график уравнения (3), изображенный на черт. 5 (при $a > 0$), передвинем параллельно оси OY на отрезок b: наверх, если b — положительно, и вниз, если оно отрицательно. Таким образом, мы получим прямую, параллельную исходной прямой и отсекающую на оси OY отрезок $\overline{OM_0} = b$ (черт. 7).

Итак, *график функции* (2) *есть прямая линия, причем коэффициент a равен тангенсу угла, образованного этой прямой с осью OX, а свободный член b равен отрезку, отсекаемому этой прямой на оси OY, считая от начала O.*

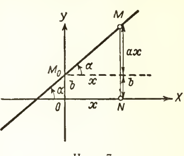
Коэффициент a иногда называют просто *уклоном* прямой, а b — *начальной ординатой* этой прямой. Наоборот, если нам дана какая-

нибудь прямая L, не параллельная оси OY, то нетрудно написать уравнение вида (2), соответствующее этой прямой. Согласно предыдущему, достаточно взять коэффициент a равным тангенсу угла наклона этой прямой к оси OX и b равным отрезку, отсекаемому этой прямой на оси OY.

Отметим один частный случай, который представляет известную особенность. Пусть $a=0$. Уравнение (2) дает нам при всяком x:

$$y=b, \qquad (2_1)$$

т. е. получается такая „функция" от x, которая при всех значениях x сохраняет одно и то же значение b. Нетрудно видеть, что графиком уравнения (2_1) будет прямая, параллельная оси OX и отстоящая от этой оси на расстоянии $|b|$ (сверху, если $b>0$, и снизу, если $b<0$). Чтобы не делать специальных оговорок, мы будем иногда говорить, что уравнение (2_1) также определяет функцию от x.



Черт. 7.

13. Приращение. Основное свойство линейной функции. Установим одно новое важное понятие, с которым часто приходится иметь дело при исследовании функциональной зависимости.

Приращением независимой переменной величины x при переходе от начального значения x_1 к конечному x_2 называется разность между конечным и начальным значениями: x_2-x_1. Соответствующим приращением функции $y=f(x)$ называется разность между конечным и начальным значениями функции:

$$y_2-y_1=f(x_2)-f(x_1).$$

Эти приращения часто обозначают так:

$$\Delta x=x_2-x_1, \quad \Delta y=y_2-y_1.$$

Заметим при этом, что приращение может быть как положительной, так и отрицательной величиной, так что величина, получив „приращение", не обязательно должна увеличиться.

Обратим внимание на то, что запись Δx надо рассматривать как единое целое для обозначения приращения x.

Обратимся к случаю линейной функции

$$y_2=ax_2+b \quad \text{и} \quad y_1=ax_1+b.$$

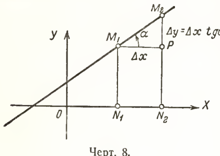
Вычитая почленно, получим:

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \tag{4}$$

или

$$\Delta y = a\,\Delta x.$$

Равенство это показывает, что *линейная функция* $y = ax + b$ *обладает тем свойством, что приращение функции* $(y_2 - y_1)$ *пропорционально приращению независимой переменной* $(x_2 - x_1)$, *причем коэффициент пропорциональности равен* a, т. е. *угловому коэффициенту, или уклону графика функции.*



Черт. 8.

Если мы обратимся к самому графику (черт. 8), то приращению независимой переменной соответствует отрезок $\overline{M_1P} = \Delta x = x_2 - x_1$ и приращению функции — отрезок $\overline{PM_2} = \Delta y = y_2 - y_1$, и формула (4) непосредственно вытекает из рассмотрения треугольника M_1PM_2.

Положим теперь, что некоторая функция обладает указанным выше свойством пропорциональности приращений независимой переменной и функции, выражаемым формулой (4). Из этой формулы следует:

$$y_2 = a(x_2 - x_1) + y_1$$

или

$$y_2 = ax_2 + (y_1 - ax_1).$$

Будем считать исходные значения переменных x_1 и y_1 вполне определенными и обозначим разность $(y_1 - ax_1)$ одной буквой b:

$$y_2 = ax_2 + b.$$

Так как окончательные значения переменных x_2 и y_2 мы можем брать любыми, то вместо букв x_2 и y_2 можно просто писать буквы x и y, и предыдущее равенство перепишется в виде:

$$y = ax + b,$$

т. е. *всякая функция, обладающая указанным выше свойством пропорциональности приращений есть линейная функция* $y = ax + b$, *причем* a *есть коэффициент пропорциональности.*

Итак, линейная функция и график ее, прямая линия, могут служить для изображения всякого закона природы, в котором имеет место пропорциональность между приращениями исследуемых величин, что случается весьма часто.

14. График равномерного движения. Наиболее важное приложение, которое дает *механическое* истолкование уравнения прямой и его коэффициентов, — это *график равномерного движения.* Если точка P движется по некоторому пути (траектории), положение ее вполне определяется расстоянием, отсчитываемым по траектории в ту или иную сторону от некоторой данной ее точки A до точки P. Это расстояние, т. е. дуга AP, называется пройденным путем и обозначается буквой s, причем s может быть и положительным и отрицательным, значения s в одну сторону от начальной точки A считаются положительными, а в другую — отрицательными.

Черт. 9.

Пройденный путь s есть некоторая функция от времени t, приняв которое за независимую переменную, можем построить *график движения*, т. е. график функциональной зависимости (черт. 9)

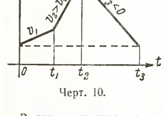
$$s = f(t);$$

его не следует смешивать с самой *траекторией* движения.

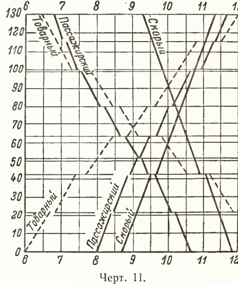
Движение называется *равномерным*, если путь, проходимый точкой за любой промежуток времени, пропорционален этому промежутку, другими словами, если отношение

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

пути, пройденного за промежуток времени от t_1 до t_2, к величине этого промежутка есть постоянная величина, которая называется *скоростью* движения и обозначается через v.



Черт. 10.



Черт. 11.

В силу сказанного выше, *уравнение графика равномерного движения имеет вид:*

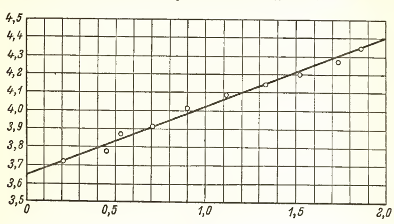
$$s = vt + s_0;$$

самый график есть прямая, угловой коэффициент которой равен скорости движения, начальная же ордината s_0 *есть начальное значение пройденного пути* s, т. е. *значение* s *при* $t = 0$.

На черт. 10 изображен график движения точки P, которая двигалась с постоянной скоростью v_1 в положительном направлении от момента 0 до

момента t_1 (угол с осью t острый), затем с постоянной же, но большей скоростью v_2, в том же направлении (угол острый, но больший) до момента t_2, а затем с постоянной, но отрицательной скоростью v_3 (в обратном направлении, угол тупой) до начального своего положения. В случае, когда приходится иметь дело с многими точками, движущимися по одной и той же траектории (например при составлении расписания движения поездов или трамваев), такой *графический способ* является единственно удобным на практике средством для определения встреч движущихся точек и вообще для обозрения всего движения (черт. 11).

15. Эмпирические формулы. Простота построения прямой и выражаемого ею закона пропорциональности приращения функции и независимой переменной делает график прямой весьма удобным средством при нахождении *эмпирических формул*, т. е. таких, которые выводятся непосредственно из данных опыта, без особого теоретического исследования.



Черт. 12.

Изобразив графически полученную из опыта таблицу на листе миллиметровой бумаги, мы найдем ряд точек, и если мы желаем получить приближенную эмпирическую формулу для изучаемой функциональной зависимости в виде *линейной* функции, нам остается провести *прямую*, которая если и не проходит сразу через все построенные точки (что, конечно, почти никогда невозможно), то, по крайней мере, проходит м е ж д у этими точками и при этом так, чтобы по возможности одинаковое число точек оказалось как по одну, так и по другую сторону от прямой, и все они лежали достаточно к ней близко. В теории ошибок и обработки наблюдений изучаются более точные способы как для построения указанной прямой, так и для суждения о совершаемой при таком приближенном представлении погрешности. Но при менее точных исследованиях, с которыми приходится иметь дело в технике, построение эмпирической прямой проще всего производить по способу „натянутого шнурка", сущность которого ясна из самого названия. Построив прямую, с помощью непосредственного измерения определяем ее уравнение

$$y = ax + b,$$

которое и дает искомую эмпирическую формулу. При выводе этой формулы надлежит иметь в виду, что очень часто масштабы для величин x и y бывают различны, т. е. *одна и та же длина, отложенная на осях* OX и OY,

изображает разные числа. В этом случае угловой коэффициент a не будет равен тангенсу угла, образуемого прямой с осью OX, но будет отличаться от него множителем, равным численной величине отношения между единицами длины, принятыми при изображении величин x и y.

Пример (черт. 12).

x	0,212	0,451	0,530	0,708	0,901	1,120	1,341	1,520	1,738	1,871
y	3,721	3,779	3,870	3,910	4,009	4,089	4,150	4,201	4,269	4,350

Отв.

$$y \approx 0{,}375x + 3{,}65.$$

(Знаком $\approx$ мы обозначаем здесь и в дальнейшем *приближенное равенство.*)

16. Парабола второй степени. Линейная функция

$$y = ax + b$$

есть частный случай *целой функции n-й степени* или *полинома (многочлена) n-й степени*

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

простейший случай которого после линейной функции есть *трехчлен второй степени* ($n = 2$):

$$y = ax^2 + bx + c;$$

график этой функции называется *параболой второй степени* или *просто параболой.*

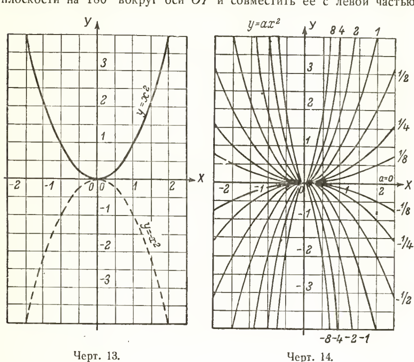
Пока мы будем исследовать лишь простейший случай параболы

$$y = ax^2. \qquad (5)$$

Кривая эта без труда может быть построена по точкам. На черт. 13 изображены кривые $y = x^2$ ($a = 1$) и $y = -x^2$ ($a = -1$). Кривая, соответствующая уравнению (5), расположена целиком над осью OX при $a > 0$ и под осью OX при $a < 0$. Ордината этой кривой возрастает по абсолютному значению, когда x возрастает по абсолютному значению, и тем быстрее, чем больше абсолютная величина a. На черт. 14 изображен ряд графиков функции (5) при различных значениях a, которые проставлены на чертеже при соответствующих этим значениям параболах.

Уравнение (5) содержит только x^2, а потому не меняется при замене x на $(-x)$, т. е. если некоторая точка (x, y) лежит на

параболе (5), то и точка $(-x, y)$ лежит на той же параболе. Две точки (x, y) и $(-x, y)$, очевидно, симметричны относительно оси OY, т. е. одна из них является зеркальным изображением другой относительно этой оси. Таким образом, если повернуть правую часть плоскости на 180° вокруг оси OY и совместить ее с левой частью,



Черт. 13. Черт. 14.

то часть параболы, лежащая справа от оси OY, совпадет с частью параболы, лежащей слева от этой оси. Иначе говоря, ось OY *есть ось симметрии параболы* (5).

Начало координат оказывается самой низкой точкой кривой при $a>0$ и самой высокой при $a<0$ и называется *вершиной параболы*.

Коэффициент a вполне определяется, если задать одну точку $M_0(x_0, y_0)$ параболы, отличную от вершины, так как тогда имеем:

$$y_0 = ax_0^2, \qquad a = \frac{y_0}{x_0^2},$$

после чего уравнение параболы (5) примет вид:

$$y = y_0\left(\frac{x}{x_0}\right)^2. \tag{6}$$

Существует весьма простой графический способ построения какого угодно числа n точек параболы при заданных вершине, оси симметрии и любой ее точке M_0, отличной от вершины.

Абсциссу и ординату данной точки $M_0(x_0, y_0)$ делим на n равных частей (черт. 15) и через начало координат проводим лучи к точкам деления ординаты. Пересечение этих лучей с прямыми, проведенными через точки деления абсциссы параллельно оси OY, и дает точки параболы. Действительно, по построению мы имеем (черт. 15):

$$x_1 = x_0 \cdot \frac{n-1}{n},\ y' = y_0 \cdot \frac{n-1}{n},$$

$$y_1 = y' \cdot \frac{n-1}{n} = y_0 \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = y_0 \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2,$$

т. е. на основании (6) точка $M_1(x_1, y_1)$ также лежит на параболе. Доказательство для других точек аналогично.

Черт. 15.

Если имеются две функции:

$$y = f_1(x) \text{ и } y = f_2(x)$$

и соответствующие им графики, то координаты точек пересечения этих графиков удовлетворяют обоим написанным уравнениям, т. е. абсциссы этих точек пересечения суть решения уравнения

$$f_1(x) = f_2(x).$$

Черт. 16.

Указанное обстоятельство легко использовать для приближенного решения квадратного уравнения. Построив на отдельном листе миллиметровой бумаги, по возможности точнее, график параболы

$$y = x^2, \qquad (6_1)$$

мы можем рассматривать корни квадратного уравнения

$$x^2 = px + q, \qquad (7)$$

как абсциссы точек пересечения параболы (6_1) и прямой $y = px + q$, так что решение уравнения (7) сводится к нахождению на чертеже упомянутых точек пересечения. На черт. 16 изображены три случая, когда таких точек будет две, одна (касание прямой с параболой) и ни одной.

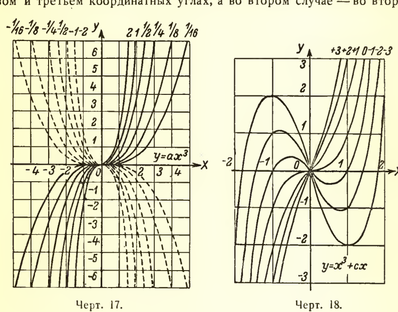
17. Парабола третьей степени. Многочлен 3-й степени

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

имеет своим графиком кривую, называемую *параболой третьей степени.* Мы рассмотрим эту кривую в простейшем случае

$$y = ax^3. \tag{8}$$

При положительном a знаки x и y одинаковы, а при отрицательном a — различны. В первом случае кривая расположена в первом и третьем координатных углах, а во втором случае — во втором



Черт. 17. Черт. 18.

и четвертом углах. На черт. 17 изображен вид этой кривой при различных значениях a.

Если x и y одновременно заменить на $(-x)$ и $(-y)$, то обе части уравнения (8) изменят знак, и уравнение по существу не изменится, т. е. если точка (x, y) лежит на кривой (8), то и точка $(-x, -y)$ также лежит на этой кривой. Точки (x, y) и $(-x, -y)$ лежат, очевидно, симметрично относительно начала O, т. е. отрезок, их соединяющий, делится началом O пополам. Из предыдущего следует, что всякая хорда кривой (8), проходящая через начало координат O, делится этим началом пополам. Иначе это выражают так: *начало координат O есть центр кривой* (8).

Отметим еще один частный случай параболы третьей степени:

$$y = ax^3 + cx. \tag{9}$$

Правая часть этого уравнения есть сумма двух слагаемых, и, следовательно, для построения этой кривой достаточно провести прямую

$$y = cx \tag{10}$$

и взять сумму соответствующих ординат линий (8) и (10) непосредственно из чертежа. Различные виды, которые может при этом принять кривая (9) (при $a = 1$ и различных c), изображены на черт. 18.

Построив кривую

$$y = x^3,$$

получим удобный (при небольшой точности вычислений) *графический способ для решения уравнения 3-й степени*

$$x^3 = px + q,$$

так как корни этого уравнения суть не что иное, как абсциссы точек пересечения кривой $y = x^3$ с прямой

$$y = px + q.$$

Черт. 19.

Чертеж нам покажет (черт. 19), что таких точек пересечения может быть одна, две или три, но одна — наверно, т. е. *уравнение 3-й степени имеет, по крайней мере, один вещественный корень.* Строго доказано это будет впоследствии.

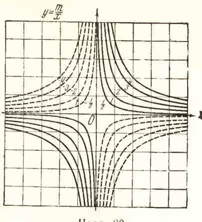
18. Закон обратной пропорциональности. Функциональная зависимость

$$y = \frac{m}{x} \tag{11}$$

выражает закон обратной пропорциональности между переменными x и y. При увеличении x в несколько раз y уменьшается во столько же раз. При $m > 0$ переменные x и y одного и того же знака, т. е. график расположен в первом и третьем координатных углах, а при $m < 0$ — во втором и четвертом. При x, близких к нулю, дробь $\frac{m}{x}$ велика по абсолютной величине. Наоборот, при больших по абсолютной величине значениях x дробь $\frac{m}{x}$ мала по абсолютной величине.

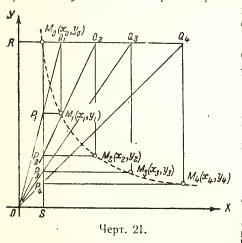
Непосредственное построение этой кривой по точкам приведет нас к черт. 20, на котором изображены кривые (11) при различных значениях m, причем сплошной линией начерчены кривые, соответствующие случаю $m > 0$, пунктирной — случаю $m < 0$, и у каждой кривой проставлено соответствующее ей значение m. Мы видим, что

каждая из построенных кривых, которые называются *равнобочными гиперболами*, имеет *бесконечные ветви*, приближающиеся к осям



Черт. 20.

координат OX и OY при беспредельном увеличении абсциссы x или ординаты y точки на рассматриваемой ветви. Эти прямые называются *асимптотами* гиперболы.



Черт. 21.

Коэффициент m в уравнении (11) определяется вполне, если задать любую точку M_0 (x_0, y_0) изучаемой кривой, так как тогда

$$x_0 y_0 = m;$$

уравнение же (11) перепишется в виде:

$$xy = x_0 y_0 \qquad (12)$$

или

$$\frac{y}{x_0} = \frac{y_0}{x}.$$

Отсюда вытекает *графический способ* построения какого угодно числа точек равнобочной гиперболы, если заданы ее асимптоты и какая-нибудь ее точка M_0 (x_0, y_0). Приняв асимптоты за оси координат, проведем из начала координат произвольные лучи OP_1, OP_2, ... и отметим точки пересечения этих лучей с прямыми $y = y_0$ и $x = x_0$.

Проводя через каждые две такие точки, лежащие на одном луче, прямые, параллельные осям координат, получим в пересечении этих прямых точку гиперболы (черт. 21). Это вытекает из подобия треугольников ORQ_1 и OSP_1:

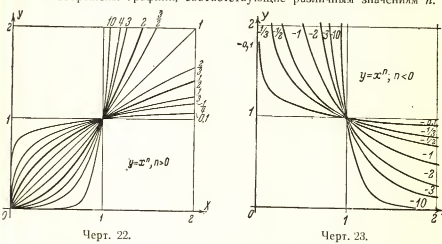
$$\frac{\overline{SP_1}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{RQ_1}} \text{ или } \frac{y_1}{x_0} = \frac{y_0}{x_1},$$

т. е. точка M_1 (x_1, y_1) лежит на кривой (12).

19. Степенна́я функция. Функции $y = ax$, $y = ax^2$, $y = ax^3$ и $y = \frac{m}{x}$, которые мы выше исследовали, суть частные случаи функции вида:

$$y = ax^n, \tag{13}$$

где a и n — какие угодно постоянные. Функция (13) вообще называется *степенной функцией*. При построении кривой мы ограничимся лишь положительными значениями x и случаем $a = 1$. На черт. 22 и 23 изображены графики, соответствующие различным значениям n.



Черт. 22. Черт. 23.

Для всех значений n уравнение $y = x^n$ дает $y = 1$ при $x = 1$, т. е. все кривые проходят через точку (1, 1). При положительных значениях n кривые при $x > 1$ подымаются вверх тем круче, чем больше величина n (черт. 22). При отрицательных n (черт. 23) функция $y = x^n$ равносильна дроби. Например, вместо $y = x^{-2}$ можно написать $y = \frac{1}{x^2}$. В этих случаях при возрастании x ординаты y, наоборот, убывают. Кривые, соответствующие уравнению (13), называются иногда *политропическими*. Они часто встречаются в термодинамике.

Заметим при этом, что при дробном n мы считаем значение радикала положительным; например, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ считаем положительным.

Две постоянные a и n, входящие в уравнение (13), определятся, если задать две точки кривой M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2), после чего окажется

$$y_1 = ax_1^n, \quad y_2 = ax_2^n; \tag{14}$$

деля одно уравнение на другое, исключаем a:

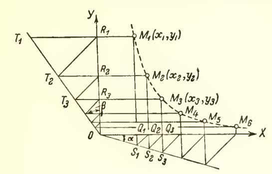
$$\frac{y_1}{y_2} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n,$$

затем, логарифмируя, находим n по формуле:

$$n = \frac{\log y_1 - \log y_2}{\log x_1 - \log x_2};$$

найдя n, из любого из уравнений (14) получим a.

Графический способ построения какого угодно числа точек кривой (13) по двум заданным ее точкам $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ изображен на черт. 24. Проводим через точку O два произвольных луча под углом α и β к оси OX и к оси OY; из данных точек M_1 и M_2 опускаем перпендикуляры на координатные оси до пересечения их с лучами в точках S_1, S_2; T_1, T_2 и с осями



Черт. 24.

в точках Q_1, Q_2; R_1, R_2. Через точку R_2 проводим R_2T_3 параллельно R_1T_2 и через точку S_2 проводим S_2Q_3 параллельно S_1Q_2. Проводя, наконец, через T_3 и Q_3 прямые, параллельные соответственно осям OX и OY, получим в их пересечении точку $M_3(x_3, y_3)$ кривой. Действительно, из подобия треугольников находим:

$$\frac{\overline{OQ_3}}{\overline{OQ_2}} = \frac{\overline{OS_2}}{\overline{OS_1}}; \qquad \frac{\overline{OS_2}}{\overline{OS_1}} = \frac{\overline{OQ_2}}{\overline{OQ_1}},$$

т. е.

$$\frac{\overline{OQ_3}}{\overline{OQ_2}} = \frac{\overline{OQ_2}}{\overline{OQ_1}} \quad \text{или} \quad \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_2}{x_1},$$

откуда

$$x_3 = \frac{x_2^2}{x_1},$$

и точно так же можно показать, что

$$y_3 = \frac{y_2^2}{y_1}.$$

Принимая во внимание (14), находим:

$$y_3 = \frac{(ax_2^n)^2}{ax_1^n} = a\left(\frac{x_2^2}{x_1}\right)^n = ax_3^n,$$

т. е. точка (x_3, y_3) лежит действительно на кривой (13), что и требовалось доказать.

20. Обратные функции. Для исследования дальнейших элементарных функций введем новое понятие, а именно, понятие об обратной функции. Как мы уже упоминали в [5], при исследовании функциональной зависимости между переменными x и y, вопрос о выборе независимой переменной находится в нашем распоряжении и решается исключительно соображениями удобства. Пусть имеется некоторая функция $y=f(x)$, причем x играет роль независимой переменной.

Функция, которая определяется из той же функциональной зависимости $y=f(x)$, если в ней рассматривать y как независимую переменную, а x как функцию

$$x=\varphi(y),$$

называется обратной по отношению к данной функции $f(x)$, а эта последняя функция часто называется прямой.

Обозначения для переменных не играют существенной роли и, обозначая в обоих случаях независимую переменную буквою x, мы можем сказать, что $\varphi(x)$ будет обратной функцией для функции $f(x)$. Так, например, если прямые функции суть

$$y=ax+b, \ y=x^n,$$

то обратные будут

$$y=\frac{x-b}{a}, \qquad y=\sqrt[n]{x}.$$

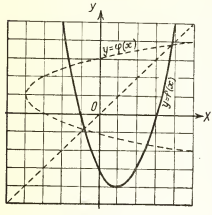
Нахождение обратной функции по уравнению прямой функции называется ее *обращением.*

Пусть мы имеем график прямой функции $y=f(x)$. Нетрудно видеть, что этот же график может служить и графиком обратной функции $x=\varphi(y)$. Действительно, оба уравнения $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ дают одну и ту же функциональную зависимость между x и y. В прямой функции произвольно задается x. Откладывая по оси OX от начала O отрезок, соответствующий числу x, и восставляя из конца этого отрезка перпендикуляр к оси OX до пересечения с графиком, мы получаем, взяв длину этого перпендикуляра с соответствующим знаком, значение y, отвечающее взятому значению x. Для обратной функции $x=\varphi(y)$ мы должны только откладывать заданное значение y по оси OY от начала O и восставлять из конца этого отрезка перпендикуляр к оси OY до пересечения с графиком. Длина этого перпендикуляра с соответствующим знаком дает нам значение x, отвечающее взятому значению y.

При этом возникает неудобство, что в первом случае независимая переменная x откладывается по одной оси, а именно оси OX, а во втором случае независимая переменная y откладывается по другой оси, а именно по оси OY. Иначе говоря, при переходе от прямой функции $y=f(x)$ к обратной $x=\varphi(y)$ мы можем оставить тот же график, но должны помнить, что при этом переходе ось для

изображения значений независимой переменной становится осью значений функции, и наоборот.

Чтобы избежать этого неудобства, мы должны при упомянутом переходе повернуть плоскость как целое таким образом, чтобы оси OX и OY поменялись местами. Для этого, очевидно, достаточно повернуть плоскость чертежа вместе с графиком на 180° вокруг биссектрисы первого координатного угла. При этом повороте оси поменяются местами, и обратную функцию $x = \varphi(y)$ надо уже писать в обычном виде: $y = \varphi(x)$. Итак, *если прямая функция $y = f(x)$ задана графически, то для получения графика обратной функции $y = \varphi(x)$ достаточно повернуть плоскость графика на 180° вокруг биссектрисы первого координатного угла.*



Черт. 25.

На черт. 25 график прямой функции изображен сплошной линией, а график обратной функции — пунктиром. Пунктиром же изображена биссектриса первого координатного угла, вокруг которой надо повернуть всю плоскость чертежа для получения пунктирной кривой из сплошной кривой.

21. Многозначность функции. Во всех графиках элементарных функций, которые мы рассмотрели выше, характерным был тот факт, что прямые, перпендикулярные оси OX, пересекали график не больше, чем в одной точке, и большею частью именно в одной точке. Это значит, что у функции, определяемой этим графиком, заданному значению x соответствует одно определенное значение y. Иначе про такую функцию говорят, что она однозначна.

Если же прямые, перпендикулярные оси OX, пересекают график в нескольких точках, то это значит, что заданному x соответствует несколько ординат графика, т. е. несколько значений y. Такие функции называются *многозначными*. Мы уже упоминали о многозначных функциях раньше [5].

Если прямая функция $y = f(x)$ однозначна, то обратная функция $y = \varphi(x)$ может оказаться и многозначной. Это видно, например, из черт. 25.

Разберем подробнее один элементарный случай. На черт. 13 изображен сплошной линией график функции $y = x^2$. Если повернуть чертеж вокруг биссектрисы первого координатного угла на 180°, то получится график обратной функции $y = \sqrt{x}$ (черт. 26).

Рассмотрим его подробнее. При отрицательных x (левее оси OY) прямые, перпендикулярные оси OX, вовсе не пересекают графика, т. е. функция $y=\sqrt{x}$ не определена при $x<0$. Это соответствует тому факту, что корень квадратный из отрицательного числа не имеет вещественных значений. Наоборот, при любом положительном x прямая, перпендикулярная оси OX, пересекает график в двух точках, т. е. при заданном положительном x мы имеем две ординаты графика: $\overline{MN}$ и $\overline{MN_1}$. Первая ордината дает для y некоторое положительное значение, а вторая дает такое же по абсолютной величине отрицательное значение. Это соответствует тому факту, что корень квадратный из положительного числа имеет два значения, равные по абсолютной величине и обратные по знаку. Из чертежа видно также, что при $x=0$ мы имеем одно только значение $y=0$. Итак, функция $y=\sqrt{x}$ определена при $x\geqslant 0$, имеет два значения при $x>0$ и одно при $x=0$.

Черт. 26.

Черт. 27.

Заметим, что мы можем сделать нашу функцию $y=\sqrt{x}$ однозначной, взяв лишь часть графика на черт. 26. Возьмем, например, только ту часть графика, которая находится в первом координатном угле (черт. 27). Это соответствует тому, что мы рассматриваем лишь положительные значения квадратного корня. Отметим также, что часть графика функции $y=\sqrt{x}$, изображенная на черт. 27, получается из той части графика прямой функции $y=x^2$ (черт. 13), которая лежит правее оси OY. Часть графика функции

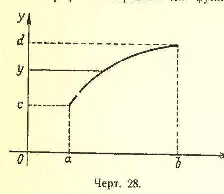
$$y=\sqrt{x} \quad \text{или} \quad y=x^{\frac{1}{2}},$$

лежащая в первом координатном угле, уже была изображена нами на черт. 22.

Займемся теперь тем случаем, когда обращение однозначной прямой функции приводит к однозначной же обратной функции. Для этого нам придется ввести новое понятие.

Функция $y=f(x)$ называется возрастающей, если, при увеличении независимой переменной x, соответствующие значения y возрастают, т. е. *если из неравенства $x_2>x_1$ следует $f(x_2)>f(x_1)$.*

При том расположении осей OX и OY, которым мы пользуемся, возрастанию x соответствует перемещение по оси OX вправо, а возрастанию y — движение по оси OY вверх. Характерной особенностью графика возрастающей функции является тот факт, что при движении вдоль кривой в сторону возрастающих x (вправо) мы движемся и в сторону возрастающих y (вверх).



Черт. 28.

Рассмотрим график какой-нибудь однозначной возрастающей функции, определенной в промежутке $a\leqslant x\leqslant b$ (черт. 28). Пусть $f(a)=c$ и $f(b)=d$, причем, очевидно, в силу возрастания функции $c<d$. Если мы возьмем какое-нибудь значение y из промежутка $c\leqslant y\leqslant d$ и в соответствующей точке восставим перпендикуляр к оси OY, то этот перпендикуляр встретит наш график лишь в одной точке, т. е. всякому y из промежутка $c\leqslant y\leqslant d$ отвечает одно определенное значение x. Иначе говоря, *функция, обратная возрастающей функции, будет однозначной.*

Нетрудно видеть из чертежа, что и эта обратная функция будет возрастающей.

Аналогичным образом, *функция $y=f(x)$ называется убывающей, если при увеличении независимой переменной x соответствующие значения y, наоборот, убывают,* т. е. *если из неравенства $x_2>x_1$ следует $f(x_1)>f(x_2)$.* Как и выше, можно утверждать, что функция, обратная убывающей функции, будет однозначной убывающей функцией. Отметим еще одно важное обстоятельство. Во всех рассуждениях мы предполагаем всегда, что *график функции представляет собою сплошную кривую без разрывов.* Этот факт равносилен особому аналитическому свойству функции $f(x)$, а именно, *непрерывности этой функции.* Строгое математическое определение непрерывности функции и исследование непрерывных функций будет нами дано в главе II. Целью настоящей главы является лишь предварительное ознакомление с основными понятиями, систематическое изучение которых будет дано в следующих главах.

В отношении терминологии заметим, что когда мы говорим о функции без упоминания о ее многозначности, то мы подразумеваем всегда однозначную функцию.

22. Показательная и логарифмическая функции. Возвращаемся теперь к исследованию элементарных функций. Показательная функция определяется уравнением

$$y = a^x, \tag{15}$$

причем мы считаем, что основание a есть заданное положительное число (отличное от единицы). При целом положительном x значение a^x очевидно. При дробном положительном x выражение a^x определяется как радикал $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, причем, в случае четного q, мы условливаемся брать положительное значение радикала. Не входя сейчас в подробное рассмотрение значений a^x при иррациональном x, заметим только, что мы получим приближенные значения a^x при иррациональном x все с большей степенью точности, если заменим иррациональное x его приближенными значениями так, как это было указано выше [2]. Например, приближенными значениями $a^{\sqrt{2}}$, где, как известно,

$$\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots,$$

будут:

$$a^1 = a;\ a^{1,4} = \sqrt[10]{a^{14}};\ a^{1,41} = \sqrt[100]{a^{141}};\ldots$$

Вычисление a^x при отрицательном x сводится к вычислению a^x при положительном x в силу формулы: $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, являющейся определением степени при отрицательном показателе. Из упомянутого выше соглашения считать радикалы в выражении $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ всегда положительными вытекает, что функция a^x при любых вещественных x всегда положительна. Кроме того, можно показать, на чем мы не останавливаемся, что при $a > 1$ функция a^x — возрастающая функция, а при $0 < a < 1$ — убывающая функция. Более подробное исследование этой функции будет нами дано дальше [44].

Черт. 29.

На черт. 29 изображены графики функции (15) при различных значениях a. Отметим некоторые особенности графиков на черт. 29. Прежде всего, при любом a мы имеем $a^0 = 1$, и, следовательно, при любом a график функции (15) проходит через точку $y = 1$ на оси OY, т. е. через точку с координатами $x = 0$, $y = 1$. Если $a > 1$,

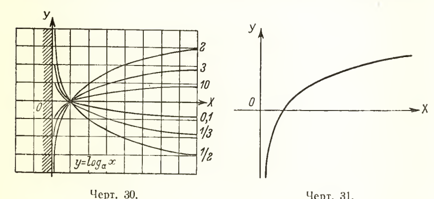
то кривая идет слева направо (в сторону возрастающих x), поднимаясь беспредельно вверх, а при движении влево кривая беспредельно приближается к оси OX, нигде ее не достигая. При $a<1$ расположение кривой относительно осей будет иным. При движении направо кривая беспредельно приближается к оси OX, а при движении влево беспредельно уходит вверх. Так как a^x всегда положительно, то график, конечно, всегда расположен над осью OX. Заметим еще, что график функции $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ можно получить из графика функции $y=a^x$, поворачивая чертеж вокруг оси OY на 180°. Это вытекает непосредственно из того, что при упомянутом повороте x переходит в $(-x)$, а $a^{-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$.

Заметим еще, что если $a=1$, то $y=1^x$, и при всяком значении x мы имеем $y=1$ [12].

Логарифмическая фуккция определяется уравнением

$$y=\log_a x. \tag{16}$$

По определению логарифма функция (16) будет обратной для функции (15). Мы можем, таким образом, получить график логарифмической функции (черт. 30) из графика показательной, повернув кривые черт. 29 на 180° вокруг биссектрисы первого координатного



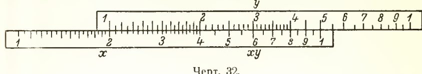
Черт. 30.

Черт. 31.

угла. Ввиду возрастания функции (15) при $a>1$ обратная функция (16) будет также однозначной возрастающей функцией от x, причем, как это видно из черт. 29, функция (16) определена лишь при $x>0$ (отрицательные числа не имеют логарифмов). Все графики черт. 30 пересекают ось OX в точке $x=1$. Это соответствует тому факту, что логарифм единицы при любом основании равен нулю. На черт. 31 изображен для ясности один график функции (16) при $a>1$.

С понятием о логарифмической функции тесно связаны понятия о *логарифмической шкале* и теория *логарифмической линейки*.

Логарифмической шкалой называется такая шкала, нанесенная на данной прямой, длина делений которой соответствует не самому числу, обозначающему деление, а его логарифму, обыкновенно по основанию 10 (черт. 32).



Черт. 32.

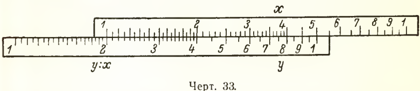
Таким образом, если при некотором делении шкалы стоит число x, то длина отрезка $\overline{1x}$ равна не x, а $\log_{10}x$. Длина отрезка между двумя точками шкалы, обозначенными через x и y, будет равняться (черт. 32):

$$\overline{1y}-\overline{1x}=\log_{10}y-\log_{10}x=\log_{10}\frac{y}{x};$$

для получения же логарифма произведения xy достаточно к отрезку $\overline{1x}$ прибавить отрезок $\overline{1y}$, так как полученный таким путем отрезок будет равен

$$\log_{10}x+\log_{10}y=\log_{10}(xy).$$

Таким образом, имея логарифмическую шкалу, можно приводить умножение и деление чисел просто к сложению и вычитанию отрезков на шкале,



Черт. 33.

что проще всего осуществляется на практике с помощью двух тождественных шкал, из коих одна может скользить вдоль другой (черт. 32 и 33). В этом и заключается основная идея устройства логарифмической линейки.

Для вычислений часто употребляется *логарифмическая бумага*, которая представляет собой разграфленный лист, причем, однако, точки деления на осях OX и OY соответствуют не обыкновенной, а логарифмической шкале.

23. Тригонометрические функции. Мы остановимся лишь на четырех основных тригонометрических функциях:

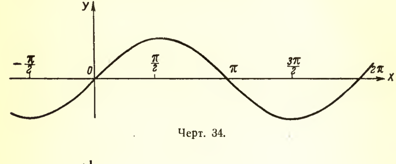
$$y=\sin x,\quad y=\cos x,$$
$$y=\operatorname{tg} x,\quad y=\operatorname{ctg} x,$$

причем независимую переменную x будем выражать в радианной мере, т. е. за единицу угла примем центральный угол, которому соответствует дуга окружности, по длине равная радиусу.

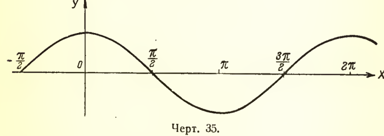
График функции $y = \sin x$ изображен на черт. 34. Из формулы:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

ясно, что график функции $y = \cos x$ (черт. 35) может быть получен из графика функции $y = \sin x$ простым передвижением его вдоль оси OX налево на отрезок $\frac{\pi}{2}$.



Черт. 34.



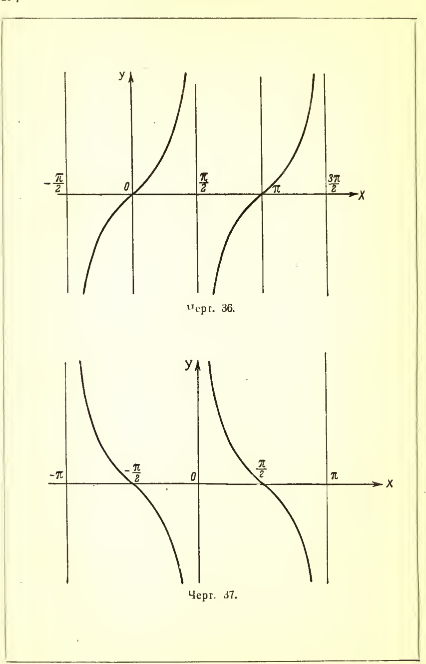
Черт. 35.

На черт. 36 представлен график функции $y = \operatorname{tg} x$. Кривая состоит из ряда одинаковых отдельных бесконечных ветвей. Каждая ветвь помещается в вертикальной полосе ширины π и представляет собою возрастающую функцию от x. Наконец, на черт. 37 представлен график функции $y = \operatorname{ctg} x$, также состоящий из отдельных бесконечных ветвей.

При передвижении графиков функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ вдоль оси OX направо или налево на отрезок 2π эти графики совмещаются сами с собой, что соответствует тому факту, что функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют период 2π, т. е.

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x \quad \text{и} \quad \cos(x \pm 2\pi) = \cos x$$

при любом x. Совершенно так же графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ совмещаются сами с собой при передвижении их вдоль оси OX на отрезок π.



Черт. 36.

Черт. 37.

Графики функций:

$$y = A\sin ax, \quad y = A\cos ax \quad (A > 0,\ a > 0) \qquad (17)$$

весьма схожи с графиками функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Чтобы получить, например, график первой из функций (17) из графика $y = \sin x$, надо длины всех ординат этого последнего графика умножить на A и изменить масштаб по оси OX так, чтобы точка с абсциссой x попала бы в точку с абсциссой $\frac{x}{a}$. Функции (17) также периодические, но имеют период $\frac{2\pi}{a}$.

Графики более сложных функций:

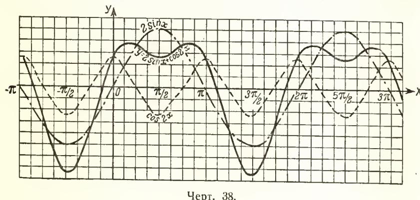
$$y = A\sin(ax + b), \quad y = A\cos(ax + b), \qquad (18)$$

которые называются *простыми гармоническими кривыми*, получаются из графиков функций (17) передвижением вдоль оси OX на отрезок $\frac{b}{a}$ влево (мы считаем $b > 0$). Функции (18) имеют также период $\frac{2\pi}{a}$.

Графики более сложных функций

$$y = A_1\sin a_1x + B_1\cos a_1x + A_2\sin a_2x + B_2\cos a_2x,$$

представляющих собою сумму нескольких слагаемых типа (17), можно строить, например, складывая ординаты графиков отдельных



Черт. 38.

слагаемых. Полученные таким образом кривые называются обычно *сложными гармоническими кривыми*. На черт. 38 указано построение графика функции

$$y = 2\sin x + \cos 2x.$$

Заметим при этом, что функция

$$y = A_1 \sin a_1 x + B_1 \cos a_1 x \tag{19}$$

может быть представлена в виде (18) и изображает простое гармоническое колебание.

Действительно, положим:

$$m = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, \quad n = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}},$$
$$A = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}.$$

Мы имеем, очевидно:

$$A_1 = mA, \quad B_1 = nA, \tag{20}$$

и, кроме того,

$$m^2 + n^2 = 1,$$
$$|m| \leqslant 1, \quad |n| \leqslant 1,$$

а потому, как известно из тригонометрии, всегда можно найти такой угол b_1, чтобы было:

$$\cos b_1 = m, \quad \sin b_1 = n. \tag{21}$$

Подставив в (19) вместо A_1 и B_1 их выражения (20) и пользуясь равенствами (21), получим:

$$y = A(\cos b_1 \cdot \sin a_1 x + \sin b_1 \cdot \cos a_1 x),$$

т. е.

$$y = A \sin(a_1 x + b_1).$$

24. Обратные тригонометрические, или круговые, функции. Эти функции получаются при обращении тригонометрических функций:

$$y = \sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg} x$$

и обозначаются, соответственно, символами:

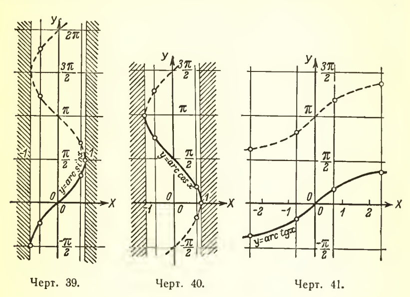
$$y = \arcsin x, \quad \arccos x, \quad \operatorname{arc\,tg} x, \quad \operatorname{arc\,ctg} x,$$

что представляет собою не что иное, как сокращенное обозначение названий: угол (или дуга), синус, косинус, тангенс или котангенс которого соответственно равен x.

Остановимся на функции

$$y = \arcsin x. \tag{22}$$

График этой функции (черт. 39) получается из графика функции $y = \sin x$ по правилу, указанному в [20]. Весь этот график расположен в вертикальной полосе ширины два, опирающейся на отрезок $-1 \leqslant x \leqslant +1$ оси OX, т. е. функция (22) определена лишь в промежутке $-1 \leqslant x \leqslant +1$. Далее, уравнение (22) равносильно уравнению $\sin y = x$, и, как известно из тригонометрии, при заданном x мы получаем бесчисленное множество значений для угла y.



Черт. 39. Черт. 40. Черт. 41.

Из графика мы видим, действительно, что прямые, перпендикулярные к оси OX в точках промежутка $-1 \leqslant x \leqslant +1$, имеют с графиком бесчисленное множество общих точек, т. е. функция (22) есть многозначная функция.

Непосредственно из черт. 39 мы видим, что функция (22) станет однозначной, если мы вместо всего графика ограничимся лишь его частью, начерченной более жирно, что соответствует условию — рассматривать только те значения угла y, имеющего данный $\sin y = x$, которые лежат в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

На черт. 40 и 41 указаны графики функций $y = \operatorname{arc} \cos x$ и $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ и отмечены жирно те части графика, которые надо оставить, чтобы сделать функцию однозначной (чертеж для $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$ предоставляется сделать читателям). Заметим при этом, что функции $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$ определены при всех вещественных значениях x.

Отмечая из чертежа интервал изменения y на отмеченной жирно части кривой, мы получаем таблицу ограничений, при которых функции становятся однозначными:

y	arc sin x	arc cos x	arc tg x	arc ctg x
Неравенства для y	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	$0 < y < \pi$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	$0 < y < \pi$

Нетрудно показать, что определенные таким образом функции, которые называются главными значениями круговых функций, удовлетворяют соотношениям:

$$\text{arc sin}\, x + \text{arc cos}\, x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{arc tg}\, x + \text{arc ctg}\, x = \frac{\pi}{2}. \tag{23}$$

§ 2. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

25. Упорядоченное переменное. Когда мы говорили о независимой переменной x, для нас было важно лишь множество тех значений, которые может принимать x. Например, это могло быть множество значений, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant x \leqslant 1$. Сейчас мы будем рассматривать переменную величину x, принимающую последовательно бесчисленное множество значений, т. е. сейчас для нас является важным не только множество значений x, но и тот порядок, в котором она принимает эти значения. Точнее говоря, предполагается следующее: 1) если x' и x'' два значения переменной величины x, то имеется возможность отличить среди них предыдущее и последующее, причем если x' предшествует x'', а x'' предшествует x''', то x' предшествует x'''; 2) никакое значение x не является последним, т. е. какое бы значение переменной величины x мы ни взяли, существует бесчисленное множество значений, следующих за ним. Такую переменную величину называют *упорядоченной переменной.* В дальнейшем мы для краткости просто будем говорить *переменная величина.* Отвлекаясь, как всегда, от конкретного характера величины (длина, вес и т. д.) термином „упорядоченная переменная величина" или просто „переменная величина" обозначают всю бесконечную последовательность ее значений.

Важным частным случаем упорядоченной переменной величины является тот случай, когда имеется возможность пронумеровать все ее последовательные значения:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

так, что из двух значений x_p и x_q то является последующим, которое имеет больший значок. Отметим еще, что среди значений переменной величины могут быть и одинаковые. Так, для пронумерованной переменной мы можем иметь, например, $x_3 = 7$, $x_{12} = 7$, $x_{23} = 7$.

Укажем простой пример упорядоченной переменной, которую нельзя пронумеровать. Положим, что переменная величина x принимает все различные значения, удовлетворяющие неравенству $a < x \leqslant a + k$ $(k > 0)$, так, что из двух различных значений x' и x'' последующим является меньшее. Иначе говоря, переменная величина x убывает через все вещественные значения от $x = a + k$ к a, но не достигает значения $x = a$. Аналогично можно рассматривать возрастающую переменную на промежутке $a - k \leqslant x < a$.

Укажем еще один пример. Переменная величина x принимает все различные значения, удовлетворяющие неравенству $a - k \leqslant x \leqslant a + k$, кроме значения $x = a$. Если x' и x'' два различных значения этой переменной, у которых абсолютные разности $x - a$ не одинаковы, то последующим считается то, у которого это абсолютное значение меньше, а если $x' - a$ и $x'' - a$ отличаются лишь знаком, то последующим считается то, для которого разность $x - a$ отрицательна. В этом примере первым значением переменной является $x = a + k$, вторым $x = a - k$. Дальнейшая нумерация значений переменной невозможна. Можно вместо предыдущего неравенства взять неравенство $a - k < x < a + k$, кроме $x = a$, при прежнем определении порядка изменения x. При этом нет возможности указать и первых двух значений переменной x.

Для явлений, происходящих во времени, последовательность значений переменной величины естественно устанавливается их последовательностью во времени, и мы в дальнейшем иногда будем пользоваться схемой времени и употреблять термины „до" и „после" вместо „предыдущее" и „последующее" значения.

В дальнейшем нам часто придется иметь дело с тем случаем упорядоченной переменной x, когда она является функцией другой упорядоченной переменной t, т. е. $x = x(t)$, причем считается, что упорядоченность x связана с упорядоченностью t, т. е. если t' предшествует t'', то $x(t')$ предшествует $x(t'')$. В случае пронумерованной переменной t играет роль значка и принимает лишь целые значения: $t = 1, 2, 3, \ldots$

Каждому значению переменной величины x соответствует определенная точка K на оси OX. Таким образом, последовательное изменение величины x изобразится движением точки K по оси OX.

Настоящий параграф посвящен в основном теории пределов, являющейся фундаментом всего современного математического анализа. В этой теории рассматриваются некоторые наиболее простые и вместе с тем наиболее важные случаи изменения величин.

26. Величины бесконечно малые. Положим, что точка K постоянно остается внутри некоторого отрезка оси OX. Это равносильно тому условию, что длина отрезка $\overline{OK}$, где O — начало координат, остается меньше определенного положительного числа M. В этом случае величина x называется *ограниченной*. Принимая во внимание, что длина отрезка $\overline{OK}$ есть $|x|$, можем высказать следующее определение:

Определение. *Переменная величина x называется ограниченной, если существует такое положительное число M, что для всех значений переменной* $|x| < M$.

Примером ограниченной величины может служить $x = \sin \alpha$, где угол α меняется любым образом. В данном случае за M мы можем принять любое число, большее единицы.

Рассмотрим теперь тот случай, когда точка K, последовательно перемещаясь, беспредельно приближается к началу координат. Точнее говоря, положим, что точка K при своем последовательном перемещении попадает внутрь любого наперед заданного малого отрезка $\overline{S'S}$ оси OX с серединой O и при дальнейшем движении остается внутри этого отрезка. В этом случае говорят, что *величина x стремится к нулю* или есть *величина бесконечно малая.*

Обозначим длину отрезка $\overline{S'S}$ через 2ε. Буквой ε мы обозначили тем самым любое заданное положительное число. Если точка K находится внутри $\overline{S'S}$, то длина $\overline{OK} < \varepsilon$ и, наоборот, если длина $\overline{OK} < \varepsilon$, то точка K находится внутри $\overline{S'S}$. Мы можем, таким образом, высказать следующее определение:

Определение. *Переменная величина x стремится к нулю или есть бесконечно малая, если при любом заданном положительном ε существует такое значение величины x, что для всех последующих значений выполнено неравенство* $|x| < \varepsilon$.

Ввиду важности понятия бесконечно малой величины дадим другую формулировку того же определения:

Определение. *Величина x называется стремящейся к нулю или бесконечно малой, если $|x|$ при последовательном изменении x делается и при дальнейшем изменении остается меньше любого наперед заданного малого положительного числа* ε.

Термином „бесконечно малая величина“ мы обозначаем вышеописанный характер изменения переменной величины, и не надо смешивать понятия бесконечно малой величины с часто употребляющимся в практике понятием *очень малой величины.*

Положим, что при измерении длины некоторого участка мы получили 1000 *м* с каким-то остатком, который считаем очень малым по сравнению со всей длиной и им пренебрегаем. Длина этого остатка выражается определенным положительным числом, и термин „бесконечно малый“ в данном случае, очевидно, неприменим. Если бы в другом, более точном измерении мы встретились с такою же длиной, то перестали бы уже считать ее очень малой и приняли бы ее во внимание. Мы видим, таким образом, что понятие малой величины есть понятие относительное, связанное с практическим характером измерения.

Положим, что переменная величина x принимает последовательно значения:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n,\ \ldots$$

и пусть ε есть любое заданное положительное число. Чтобы убе-

диться в том, что x есть величина бесконечно малая, нам надо показать, что $|x_n|$, начиная с некоторого значения значка n, будет меньше ε, т. е., иными словами, нам надо обнаружить существование такого целого числа N, чтобы было

$$|x_n| < \varepsilon \text{ при условии } n > N.$$

Это число N зависит от ε.

Рассмотрим в качестве примера бесконечно малой величины величину, принимающую последовательно значения:

$$q,\ q^2,\ q^3,\ \ldots,\ q^n,\ \ldots \quad (0 < q < 1). \tag{1}$$

Нам надо удовлетворить неравенству:

$$q^n < \varepsilon \text{ или } n \log_{10} q < \log_{10} \varepsilon.$$

Принимая во внимание, что $\log_{10} q$ отрицателен, можем переписать предыдущее неравенство в виде:

$$n > \frac{\log_{10} \varepsilon}{\log_{10} q},$$

ибо при делении на отрицательное число смысл неравенства меняется, и, следовательно, за N мы можем принять наибольшее целое число, заключающееся в частном $\log_{10} \varepsilon : \log_{10} q$. Таким образом, рассматриваемая величина, или, как обычно говорят, *последовательность* (1), стремится к нулю.

Если мы в последовательности (1) заменим q на $(-q)$, то разница будет лишь в том, что у нечетных степеней появится знак минус, абсолютные же величины членов этой последовательности останутся прежними, а потому и в этом случае мы будем иметь величину бесконечно малую.

Если величина x бесконечно малая, то это обозначают обычно следующим образом:

$$\lim x = 0,$$

где lim — начальные буквы латинского слова limes, что по-русски значит предел.

Укажем два свойства бесконечно малых величин.

1. *Сумма нескольких (определенного числа) бесконечно малых величин есть также величина бесконечно малая.*

Рассмотрим, например, сумму $w = x + y + z$ трех бесконечно малых величин и будем считать переменные величины пронумерованными. Пусть

$$x_1,\ x_2,\ \ldots;\quad y_1,\ y_2,\ \ldots;\quad z_1,\ z_2,\ \ldots$$

последовательные значения x, y и z. Для w получаем последовательные значения:

$$w_1 = x_1 + y_1 + z_1, \quad w_2 = x_2 + y_2 + z_2,\ \ldots$$

Пусть ε — любое заданное положительное число. Принимая во внимание, что x, y и z бесконечно малые, можем утверждать, что существует такое N_1, что $|x_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $n > N_1$; такое N_2, что $|y_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $n > N_2$; такое N_3, что $|z_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $n > N_3$. Если обозначим через N наибольшее из трех чисел N_1, N_2 и N_3, то

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad |y_n| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad |z_n| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при } n > N,$$

и, следовательно,

$$|w_n| \leqslant |x_n| + |y_n| + |z_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при } n > N,$$

т. е. $|w_n| < \varepsilon$ при $n > N$, откуда и следует, что $w = x + y + z$ есть величина бесконечно малая. В общем случае не пронумерованных переменных мы будем считать, что x, y и z суть функции некоторой упорядоченной переменной t: $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$. Значения x, y и z также тем самым суть упорядоченные переменные, а именно, если $t = t'$ предшествует $t = t''$, то $x(t')$ предшествует $x(t'')$. Упорядоченной переменной будет и сумма:

$$w(t) = x(t) + y(t) + z(t),$$

причем складываются значения переменных x, y и z, соответствующие одному и тому же значению t. Доказательство то же, что и выше, для пронумерованных переменных. В этом последнем случае роль t играет значок, и переменное t принимает, возрастая, целочисленные значения.

2. *Произведение величины ограниченной на величину бесконечно малую есть величина бесконечно малая.*

Рассмотрим произведение пронумерованных переменных xy, где x — величина ограниченная, а y — бесконечно малая. По условию $|x_n|$ остается при любом n меньше некоторого положительного числа M. Если ε — любое заданное положительное число, то существует такое N, что $|y_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ при $n > N$. При этом окажется:

$$|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{при } n > N,$$

т. е. $|x_n y_n| < \varepsilon$ при $n > N$, откуда следует $xy \to 0$. Аналогично доказательство и для не пронумерованных переменных.

Заметим, что последнее свойство остается подавно справедливым, если x — постоянное. При этом за M достаточно взять любое положительное число, большее, чем $|x|$, т. е. *произведение постоянной величины на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.*

Ввиду основного значения понятия бесконечно малой величины для дальнейшего мы остановимся еще на этом понятии и приведем некоторые дополнительные замечания к сказанному выше.

Как мы показали, переменная величина, имеющая последовательные значения (1), стремится к нулю при $0<q<1$ или при $-1<q<0$. В первом случае переменная величина стремится к нулю убывая, а во втором случае она стремится к нулю, принимая значения то больше, то меньше нуля. Считая $0<q<1$, вставим в последовательность значений (1) число нуль через одно место, т. е. возьмем пронумерованную переменную, принимающую следующую последовательность значений:

$$q,\ 0,\ q^2,\ 0,\ q^3,\ 0,\ q^4,\ 0,\ \ldots$$

Нетрудно видеть, что и эта переменная величина стремится к нулю, но при этом она бесчисленное множество раз принимает в точности само значение нуль. Это не противоречит определению величины, стремящейся к нулю.

Наконец, предположим, что все последовательные значения переменной величины равны нулю. Такая величина также подходит под определение величины, стремящейся к нулю, ибо в данном случае $|x|$ все время равно нулю, т. е. $|x|<\varepsilon$ при заданном положительном ε, не только начиная с некоторого момента изменения, но просто всегда. Иначе говоря, постоянная величина, равная нулю, подходит под определение бесконечно малой величины. Никакая другая постоянная не подходит под это определение.

Возьмем примеры переменной величины x из [25], принимающей все различные значения, удовлетворяющие неравенству $0<x\leqslant k$ (или $-k\leqslant x<0$) или $-k\leqslant x\leqslant+k$, кроме $x=0$, (мы принимаем в этих примерах $a=0$) с тем определением последовательности значений, которая указана в [25]. Нетрудно видеть, что в обоих случаях переменная x стремится к нулю. В первом случае при заданном ε, где $0<\varepsilon\leqslant k$, существует значение переменной x, равное ε, и все последующие значения удовлетворяют неравенству $0<x<\varepsilon$, а во втором и третьем случаях существует значение переменной x, равное $(-\varepsilon)$ и все последующие значения удовлетворяют условию $|x|<\varepsilon$. Если $\varepsilon>k$, то в первом случае все значения переменной удовлетворяют условию $0<x<\varepsilon$, а во втором — условию $|x|<\varepsilon$. Указанные три случая изменения переменной x мы будем обозначать в настоящей главе следующим образом: $x\to+0$, $x\to-0$, $x\to 0$.

Сделаем еще одно замечание. Напомним определение бесконечно малой величины: при любом заданном положительном ε существует такое значение переменной x, что для всех последующих значений выполняется неравенство $|x|<\varepsilon$. Отсюда непосредственно следует, что при доказательстве того, что некоторая переменная величина x стремится к нулю, мы можем ограничиться рассмотрением лишь тех значений x, которые следуют после некоторого определенного значения x, причем это определенное значение можно выбрать произвольно.

В связи с этим полезно в теории пределов сделать добавление к определению ограниченной величины, а именно, не надо требовать, чтобы для всех значений величины y выполнялось неравенство $|y| < M$, а достаточно дать такое более общее определение: *величина y называется ограниченной, если существует такое положительное число M и такое значение y, что для всех последующих значений выполняется неравенство $|y| < M$.*

При таком определении ограниченной величины доказательство второго свойства бесконечно малых остается без изменения. Для пронумерованного переменного из второго определения ограниченной величины следует первое, так что второе определение не является более общим. Действительно, если $|x_n| < M$ при $n > N$, то, обозначая через M' наибольшее из чисел:

$$|x_1|, \ |x_2|, \ \ldots, \ |x_N| \text{ и } M,$$

мы можем утверждать, что $|x_n| < M' + 1$ при всяком n.

27. Предел переменной величины. Переменную величину мы назвали бесконечно малой, если соответствующая ей движущаяся по оси OX точка K обладает тем свойством, что длина отрезка $\overline{OK}$ при последовательном изменении K становилась и при дальнейшем изменении K оставалась меньше любого заданного положительного числа ε. Положим теперь, что это свойство выполняется не для отрезка $\overline{OK}$, а для отрезка $\overline{AK}$, где A есть определенная точка на оси OX с абсциссой a (черт. 42). В этом случае промежуток $\overline{S'S}$ длины 2ε будет иметь середину не в начале координат, а в точке A с абсциссой $x = a$, и точка K при своем последовательном перемещении должна попасть внутрь этого промежутка и там при дальнейшем перемещении оставаться. В этом случае говорят, что постоянное число a есть *предел переменной величины x*, или что переменная величина *x стремится к a.*

Черт. 42.

Учитывая, что длина отрезка $\overline{AK}$ есть $|a - x|$ [9], мы можем формулировать следующее определение:

Определение. *Пределом переменной величины x называется такое постоянное число a, что разность $a - x$ (или $x - a$) есть величина бесконечно малая.*

Принимая во внимание определение бесконечно малой величины, можно сформулировать определение предела и таким образом:

Определение. *Пределом переменной величины x называется такое постоянное число a, что имеет место следующее свойство: при любом заданном положительном ε существует такое значение*

переменной x, что для всех последующих значений выполняется неравенство $|a-x|<\varepsilon$.

Обратим внимание на некоторые непосредственно ясные следствия этого определения, на подробном доказательстве которых мы не останавливаемся.

Переменная величина не может стремиться к двум различным пределам, но не всякая переменная величина имеет предел. Например, переменная величина $\sin\alpha$ при последовательном увеличении угла α колеблется между -1 и $+1$ и предела не имеет.

Предел бесконечно малой величины равен нулю.

Если две одновременно изменяющиеся переменные x и y, стремящиеся к пределам при последовательном изменении, постоянно удовлетворяют неравенству $x \leqslant y$, то их пределы a и b удовлетворяют условию $a \leqslant b$.

Заметим при этом, что если переменные удовлетворяют неравенству $x<y$, то для их пределов может получиться и знак равенства, т. е. все равно $a \leqslant b$.

Если три одновременно изменяющиеся переменные x, y и z при своем последовательном изменении постоянно удовлетворяют условию $x \leqslant y \leqslant z$, причем известно, что x и z стремятся к одному и тому же пределу a, то и y стремится к пределу a.

Если a есть предел переменной величины x (или x стремится к a), то пишут $\lim x = a$. Если x есть пронумерованная переменная $x_1, x_2, \ldots$, то говорят, что a есть предел указанной последовательности и пишут $\lim x_n = a$.

Если x стремится к a, то разность $x-a=\alpha$ есть величина бесконечно малая, и мы можем написать:

$$x=a+\alpha, \tag{2}$$

т. е. *всякую переменную величину, стремящуюся к пределу, можно представить в виде суммы двух слагаемых: постоянного слагаемого, равного пределу переменной, и бесконечно малого слагаемого. Наоборот, если переменную величину x можно представить в виде суммы* (2), *где a — постоянная и α — бесконечно малая, то разность $x-a$ есть бесконечно малая, и, следовательно, a есть предел x.*

Если последовательность $x_1, x_2, \ldots$ стремится к пределу a, то всякая бесконечная частичная последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$, выделенная из вышеуказанной, также стремится к пределу a. В этой частичной последовательности значки n_k, возрастая при увеличении k, пробегают некоторую часть множества целых положительных чисел. Аналогичное свойство для не пронумерованного переменного, стремящегося к пределу, вообще говоря, не имеет места.

В качестве примера рассмотрим пронумерованную переменную

$$x_1=0{,}1;\quad x_2=0{,}11;\quad \ldots;\quad x_n=0{,}\overbrace{11\ldots1}^{n};\ \ldots$$

и докажем, что ее предел равен $\frac{1}{9}$. Составим разность

$$\frac{1}{9}-x_1=\frac{1}{90};\quad \frac{1}{9}-x_2=\frac{1}{900};\quad \ldots;\quad \frac{1}{9}-x_n=\frac{1}{9\cdot10^n};\quad \ldots$$

Неравенство $\frac{1}{9\cdot10^n}<\varepsilon$ равносильно неравенству

$$9\cdot10^n>\frac{1}{\varepsilon}\quad \text{или}\quad n>\log_{10}\frac{1}{\varepsilon}-\log_{10}9,$$

и за N можно принять наибольшее целое число, содержащееся в разности $\log_{10}\frac{1}{\varepsilon}-\log_{10}9$.

Рассмотрим теперь сумму первых членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S_n=b+bq+bq^2+\ldots+bq^{n-1}\qquad (0<|q|<1).$$

Как известно

$$S_n=\frac{b-bq^n}{1-q},$$

и, придавая n значения 1, 2, 3 ..., получим последовательность

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots$$

Из выражения S_n имеем

$$\frac{b}{1-q}-S_n=\frac{b}{1-q}q^n.$$

Правая часть является произведением постоянного множителя $\frac{b}{1-q}$ и бесконечно малого множителя q^n [26]. В силу второго свойства бесконечно малых [26] разность $\frac{b}{1-q}-S_n$ есть величина бесконечно малая и, следовательно, число $\frac{b}{1-q}$ есть предел последовательности $S_1,\ S_2,\ \ldots$

Вернемся к пределу переменной величины x из [25], определяемой неравенством $a<x\leqslant a+k$, или $a-k\leqslant x<a$, или $a-k\leqslant x\leqslant a+k$, кроме $x=a$, с указанной в [25] последовательностью значений x. Эта величина имеет, очевидно, во всех трех случаях предел, равный a, и мы будем обозначать в настоящей главе указанные три случая изменения переменной x следующим образом: $x\to a+0$; $x\to a-0$; $x\to a$.

По поводу величин, стремящихся к любому пределу a, можно сделать те же замечания, которые мы сделали в предыдущем параграфе по поводу величин, стремящихся к нулю.

Всякая постоянная, равная числу a, подходит под определение переменной, стремящейся к пределу a. Заметим при этом, что величина, все значения которой равны a, имеет, как это и полагается, бесчисленное множество значений, но все эти значения равны одному и тому же числу. Такое рассмотрение постоянной величины как частного случая переменной будет нам удобно впоследствии.

Далее, при определении предела переменной величины x достаточно рассматривать не все ее значения, а только те, которые следуют после некоторого (какого угодно) из ее значений.

Отметим еще, что если переменная x стремится к пределу a, то, начиная с некоторого момента изменения, она будет сколь угодно мало отличаться от a, а потому и подавно будет ограниченной.

Упорядоченная переменная величина, как мы уже упоминали, не всегда имеет предел. Если мы возьмем, например, пронумерованную переменную $x_1 = 0{,}1$; $x_2 = 0{,}11$; $x_3 = 0{,}111, \ldots,$ имеющую предел $\frac{1}{9}$, и переменную $y_1 = \frac{1}{2}$; $y_2 = \frac{1}{2^2}$; $y_3 = \frac{1}{2^3}$; …, имеющую предел нуль, то пронумерованная переменная $z_1 = 0{,}1$; $z_2 = \frac{1}{2}$; $z_3 = 0{,}11$; $z_4 = \frac{1}{2^2}$; $z_5 = 0{,}111$; $z_6 = \frac{1}{2^3}$; …, не стремится ни к какому пределу. Последовательность ее значений $z_1, z_3, z_5, \ldots$ имеет предел $\frac{1}{9}$, а последовательность $z_2, z_4, z_6, \ldots$ — предел нуль.

28. Основные теоремы. 1. *Если слагаемые алгебраической суммы конечного числа переменных величин имеют пределы, то и их сумма имеет предел, и этот предел равен сумме пределов слагаемых.*

Рассмотрим сумму $x - y + z$ и положим, что величины x, y и z стремятся соответственно к пределам a, b и c. Докажем, что сумма их будет стремиться к пределу $a - b + c$.

По условию имеем [27]:

$$x = a + \alpha,$$
$$y = b + \beta,$$
$$z = c + \gamma,$$

где α, β и γ — величины бесконечно малые. Для суммы $x - y + z$ будем иметь выражение:

$$x - y + z = (a + \alpha) - (b + \beta) + (c + \gamma) = (a - b + c) + (\alpha - \beta + \gamma).$$

Первая скобка в правой части этого равенства дает величину постоянную, а вторая — величину бесконечно малую [26]. Следовательно:

$$\lim(x - y + z) = a - b + c = \lim x - \lim y + \lim z.$$

2. *Если сомножители произведения конечного числа переменных величин имеют предел, то и их произведение имеет предел, и этот предел равен произведению пределов сомножителей.*

Рассмотрим произведение xy двух переменных. Положим, что x и y стремятся соответственно к пределам a и b, и докажем, что xy будет стремиться к пределу ab.

По условию имеем:

$$x = a + \alpha, \quad y = b + \beta,$$

где α и β — величины бесконечно малые, и, следовательно:

$$xy = (a + \alpha)(b + \beta) = ab + (a\beta + b\alpha + \alpha\beta).$$

Применяя оба свойства бесконечно малых из [26], мы видим, что сумма, стоящая в правой части этого равенства в скобках, есть величина бесконечно малая, и поэтому мы можем утверждать, что

$$\lim(xy) = ab = \lim x \cdot \lim y.$$

3. *Если делимое и делитель имеют пределы и предел делителя отличен от нуля, то и частное имеет предел, и этот предел равен частному пределов делимого и делителя.*

Рассмотрим частное $\frac{x}{y}$ и положим, что величины x и y стремятся соответственно к пределам a и b, причем $b \neq 0$. Докажем, что $\frac{x}{y}$ будет стремиться к $\frac{a}{b}$.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что разность $\frac{a}{b} - \frac{x}{y}$ есть величина бесконечно малая. По условию имеем:

$$x = a + \alpha; \quad y = b + \beta, \qquad (b \neq 0),$$

где α и β — величины бесконечно малые. Отсюда:

$$\frac{a}{b} - \frac{x}{y} = \frac{1}{b(b + \beta)} \cdot (a\beta - b\alpha).$$

Знаменатель дроби, стоящей в правой части этого равенства, состоит из двух множителей и стремится к b^2. Следовательно, начиная с некоторого момента изменения, он станет больше $\frac{b^2}{2}$, вся дробь будет заключаться между нулем и $\frac{2}{b^2}$, т. е. является величиной

ограниченной. Выражение же $(a\beta - b\alpha)$ дает величину бесконечно малую. Следовательно [26], разность $\frac{a}{b} - \frac{x}{y}$ есть величина бесконечно малая, и

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{a}{b} = \frac{\lim x}{\lim y}.$$

Доказанные теоремы имеют основное значение в теории пределов. Мы привели их доказательства в общем случае, не считая переменные пронумерованными, как это мы делали при доказательстве свойств бесконечно малых. Но надо иметь в виду то же замечание, которое мы сделали при доказательстве первого свойства бесконечно малых. Рассмотрим случай произведения. Мы считаем, что x и y суть функции некоторого упорядоченного переменного t: $x = x(t)$; $y = y(t)$. При этом и они сами суть упорядоченные переменные. То же можно утверждать и относительно их произведения: $w(t) = x(t) \cdot y(t)$. Для пронумерованных переменных роль t играет значок, который возрастает, принимая целочисленные значения.

Отметим некоторые следствия доказанных теорем. Если x стремится к пределу a, то переменная bx^k, где b — постоянная и k — целое положительное число, будет стремиться, согласно теореме 2, к пределу ba^k.

Рассмотрим целый многочлен:

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_kx^{m-k} + \ldots + a_{m-1}x + a_m,$$

где коэффициенты a_k — постоянные. Применяя теорему 1 и пользуясь только что сделанным замечанием, можно утверждать, что при стремлении x к a этот многочлен будет стремиться к пределу:

$$\lim f(x) = f(a) = a_0a^m + a_1a^{m-1} + \ldots + \\ + a_ka^{m-k} + \ldots + a_{m-1}a + a_m. \qquad (3)$$

Точно так же мы можем утверждать, что при указанном изменении x рациональная дробь

$$\varphi(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^p + b_1x^{p-1} + \ldots + b_{p-1}x + b_p}$$

будет стремиться к пределу:

$$\lim \varphi(x) = \varphi(a) = \frac{a_0a^m + a_1a^{m-1} + \ldots + a_{m-1}a + a_m}{b_0a^p + b_1a^{p-1} + \ldots + b_{p-1}a + b_p}, \qquad (4)$$

если

$$b_0a^p + b_1a^{p-1} + \ldots + b_{p-1}a + b_p \neq 0.$$

Все эти утверждения имеют место при любом способе стремления x к пределу a. Можно считать, что $x \to a$ [27].

Вместо многочленов, расположенных по степеням одной переменной, мы могли бы, конечно, рассматривать многочлены, расположенные по степеням нескольких переменных, стремящихся к пределам.

Так, например, для пронумерованных переменных, если $\lim x_n = a$ и $\lim y_n = b$, то

$$\lim (x_n^2 + x_n y_n + y_n^2) = a^2 + ab + b^2.$$

29. Величины бесконечно большие. Если переменная величина x стремится к пределу, то она, как мы упоминали, очевидно, ограничена.

Теперь мы рассмотрим некоторые случаи изменения неограниченных величин.

Как и раньше, вместе с величиной x мы будем рассматривать соответствующую ей точку K, перемещающуюся по оси OX. Пусть эта точка K перемещается так, что какой бы большой отрезок $\overline{T'T}$ с серединой в начале координат мы ни взяли, точка K при своем последовательном перемещении окажется вне этого отрезка и при дальнейшем перемещении будет оставаться вне его. В этом случае говорят, что x есть величина бесконечно большая, или стремится к бесконечности. Пусть $2M$ — длина отрезка $\overline{T'T}$. Принимая во внимание, что длина отрезка $\overline{OK} = |x|$, можем высказать следующее определение:

Величина x называется бесконечно большой, или стремящейся к бесконечности, если $|x|$, при последовательном изменении x, делается и при дальнейшем изменении остается больше любого заданного положительного числа M. Иначе говоря: величина x называется бесконечно большой при соблюдении следующего условия: *при любом заданном положительном числе M существует такое значение переменной x, что для всех последующих значений соблюдается неравенство $|x| > M$.*

В частности, если бесконечно большая величина x при своем последовательном изменении, начиная с некоторого своего значения, остается постоянно положительной (точка K справа от точки O), то говорят, что x стремится к плюс бесконечности ($+\infty$). Если же величина x остается отрицательной (точка K слева от точки O), то говорят, что x стремится к минус бесконечности ($-\infty$).

Для обозначения бесконечно большой величины употребляют символы:

$$\lim x = \infty,$$

$$\lim x = +\infty,$$

$$\lim x = -\infty.$$

Термин „бесконечно большой“ служит лишь для краткого обозначения вышеуказанного характера изменения переменной величины x, и здесь, как и в понятии бесконечно малой величины, надо отличать понятие бесконечно большой величины от понятия *очень большой величины*.

Если, например, величина x принимает последовательно значения $1, 2, 3, \ldots$, то, очевидно, $\lim x = +\infty$. Если ее последовательные значения будут: $-1, -2, -3, \ldots$, то $\lim x = -\infty$, и, наконец, если эти значения будут: $-1, 2, -3, 4, \ldots$, то мы можем написать: $\lim x = \infty$.

Рассмотрим еще в качестве примера величину, принимающую последовательно значения:

$$q,\ q^2, \ldots,\ q^n, \ldots\ (q > 1), \tag{5}$$

и пусть M — любое заданное положительное число. Неравенство

$$q^n > M$$

равносильно следующему:

$$n > \frac{\log_{10} M}{\log_{10} q},$$

и, следовательно, если N есть наибольшее целое число, заключающееся в частном $\log_{10} M : \log_{10} q$, то будем иметь:

$$q^n > M \text{ при условии } n > N,$$

т. е. рассматриваемая переменная стремится к $+\infty$.

Если в последовательности (5) заменим q на $(-q)$, то изменятся лишь знаки при нечетных степенях q, абсолютные же значения членов последовательности останутся прежними и, следовательно, при отрицательных значениях q, по абсолютному значению бóльших единицы, последовательность (5) стремится к бесконечности.

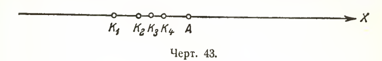
В дальнейшем, когда мы будем говорить, что переменная величина стремится к пределу, то будем подразумевать, что этот предел конечен. Иногда говорят, что „переменная величина стремится к бесконечному пределу“, обозначая этими словами бесконечно большую величину.

Из предыдущих определений непосредственно вытекает такое следствие: если переменная x стремится к нулю, то переменная $\frac{m}{x}$, где m — заданная постоянная, отличная от нуля, стремится к бесконечности, а если x стремится к бесконечности, то $\frac{m}{x}$ стремится к нулю.

30. Монотонные переменные. При рассмотрении переменной величины мы часто не в состоянии найти ее предел, но нам важно знать, что этот предел существует, т. е. что переменная стремится к пределу. Укажем один важный признак существования предела.

Положим, что переменная величина x постоянно возрастает (точнее говоря, никогда не убывает) или постоянно убывает (точнее говоря, никогда не возрастает). В первом случае всякое значение величины не меньше всех предыдущих и не больше всех последующих. Во втором случае оно не больше всех предыдущих и не меньше всех последующих. В этих случаях говорят, что *величина меняется монотонно.*

Соответствующая ей точка K на оси OX будет тогда перемещаться в одном направлении — в положительном, если переменная возрастает, и в отрицательном, если она убывает. Непосредственно ясно, что могут представиться лишь две возможности: или точка K беспредельно удаляется по прямой ($x \to +\infty$ или $-\infty$), или точка K беспредельно приближается к некоторой определенной точке A



Черт. 43.

(черт. 43), т. е. переменная x стремится к пределу. Если, кроме монотонности изменения, известно еще, что величина x ограничена, то первая возможность отпадает, и можно утверждать, что величина стремится к пределу.

Рассуждение это, основанное на интуиции, очевидно, не имеет доказательной силы. Строгое доказательство мы приведем позже.

Указанный признак существования предела обычно формулируют так: *если переменная величина ограничена и меняется монотонно, то она стремится к пределу.*

Рассмотрим в качестве примера последовательность:

$$u_1 = \frac{x}{1}, \quad u_2 = \frac{x^2}{2!}, \quad u_3 = \frac{x^3}{3!}, \quad \ldots, \quad u_n = \frac{x^n}{n!} \ldots, \text{ [1]} \tag{6}$$

где x есть данное положительное число.

Мы имеем:

$$u_n = u_{n-1} \frac{x}{n}. \tag{7}$$

[1]) Символ $n!$ есть сокращенное обозначение произведения $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ и называется „факториал n“.

При значении $n > x$ дробь $\frac{x}{n}$ будет меньше единицы и $u_n < u_{n-1}$, т. е. переменная u_n, начиная с некоторого своего значения, при увеличении n будет постоянно убывать, оставаясь больше нуля. Согласно признаку существования предела, эта переменная будет стремиться к некоторому пределу u. Будем в равенстве (7) беспредельно увеличивать целое число n. В пределе мы получим:

$$u = u \cdot 0 \quad \text{или} \quad u = 0,$$

т. е

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0. \tag{8}$$

Если мы в последовательности (6) заменим x на $(-x)$, то изменится лишь знак у членов с нечетным значком n, и эта последовательность попрежнему будет стремиться к нулю, т. е. равенство (8) справедливо при любом заданном значении x как положительном, так и отрицательном.

В этом примере мы вычислили предел u, предварительно убедившись, что он существует. Если бы этого последнего мы не сделали, то примененный нами метод мог бы привести и к ошибочному результату. Рассмотрим, например, последовательность:

$$u_1 = q, \quad u_2 = q^2, \ldots, \quad u_n = q^n, \ldots \quad (q > 1).$$

Имеем, очевидно:

$$u_n = u_{n-1}\, q.$$

Не заботясь о существовании предела u_n, обозначим его буквою u. Переходя в написанном равенстве к пределу, получим:

$$u = uq, \quad \text{т. е.} \quad u(1 - q) = 0$$

и, следовательно,

$$u = 0.$$

Но это неверно, ибо при $q > 1$, как известно, $\lim q^n = +\infty$ [29].

31. Признак Коши существования предела. Указанный в [30] признак существования предела является лишь достаточным, но не необходимым условием существования предела, ибо, как мы знаем [27], переменная величина может стремиться к пределу, меняясь и не монотонно.

Французский математик Коши дал необходимое и достаточное условие существования предела, которое мы сейчас и сформулируем. Если предел известен, то характерным для него является тот факт, что, начиная с некоторого значения переменной, абсолютное значение

разности между пределом и переменной меньше любого заданного положительного ε. Согласно признаку Коши, для существования предела необходимо и достаточно, чтобы, начиная с некоторого значения переменной, разность между любыми двумя последующими значениями переменной была меньше любого заданного положительного ε. Дадим точную формулировку признака Коши.

Признак Коши. *Для того чтобы переменная x имела предел, необходимо и достаточно выполнение следующего условия: при любом заданном положительном числе ε существует такое значение x, что для любых последующих значений x' и x'' выполняется неравенство:* $|x'-x''|<\varepsilon$.

Положим, что мы имеем пронумерованную переменную

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Согласно признаку Коши, необходимое и достаточное условие существования предела у этой последовательности состоит в следующем: при любом заданном положительном ε существует такое N (зависящее от ε), что

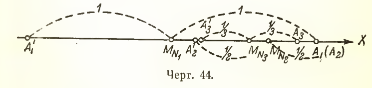
$$|x_m-x_n|<\varepsilon,\quad \text{если}\quad m \text{ и } n>N. \tag{9}$$

Необходимость этого условия доказывается очень просто. Если наша последовательность имеет предел a, то напишем $x_m-x_n=(x_m-a)+(a-x_n)$, откуда следует:

$$|x_m-x_n|\leqslant|x_m-a|+|a-x_n|.$$

Но, в силу определения предела, существует такое N, что $|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ и $|a-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$, если m и $n>N$, и, тем самым, $|x_m-x_n|<\varepsilon$, если m и $n>N$. Короче говоря, если значения x становятся сколь угодно близкими к a, то они становятся сколь угодно близкими и друг к другу.

Не приводя пока строгого доказательства достаточности условия Коши, дадим ему наглядное пояснение (черт. 44).



Черт. 44.

Пусть M_s — точка координатной оси, соответствующая числу x_s. Положим, что условие (9) выполнено. Согласно этому условию существует такое значение $N=N_1$, что

$$|x_s-x_{N_1}|<1,$$

если $s > N_1$, т. е. все точки M_s при $s > N_1$ находятся внутри отрезка $\overline{A_1'A_1}$, длина которого равна двум и середина которого находится в точке x_{N_1}.

Точно так же существует значение $N = N_2 \geqslant N_1$ такое, что

$$|x_s - x_{N_2}| < \frac{1}{2},$$

если

$$s > N_2.$$

Построим отрезок, равный единице, с серединою в точке M_{N_2} и пусть $\overline{A_2'A_2}$ — та часть этого отрезка, которая входит и в состав отрезка $\overline{A_1'A_1}$. В силу двух вышеописанных условий точки M_s при $s > N_2$ должны находиться на отрезке $\overline{A_2'A_2}$.

Точно так же существует $N = N_3 \geqslant N_2$ такое, что $|x_s - x_{N_3}| < \frac{1}{3}$ при $s > N_3$. Аналогично предыдущему, построим отрезок $\overline{A_3'A_3}$, длина которого не превосходит $\frac{2}{3}$ и который принадлежит отрезку $\overline{A_2'A_2}$, причем все точки M_s при $s > N_3$ будут находиться внутри него. Полагая $\varepsilon = \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, получим, таким образом, ряд отрезков $\overline{A_n'A_n}$, из которых каждый последующий заключается в предыдущем, и длины которых стремятся к нулю. Концы этих отрезков будут, очевидно, стремиться к одной и той же точке A, и число a, соответствующее этой точке, и будет пределом переменной величины x, так как из описанного выше построения следует, что при достаточно большом значении s все точки M_s будут сколь угодно близки к точке A.

В качестве приложения признака Коши рассмотрим уравнение Кеплера, которое служит для определения положения планеты на своей орбите. Уравнение это имеет вид:

$$x = q \sin x + a,$$

где a и q — данные числа, из которых второе заключено между нулем и единицей, а x — неизвестное.

Возьмем любое число x_0 и построим последовательность чисел:

$$x_1 = q \sin x_0 + a, \qquad x_2 = q \sin x_1 + a, \ldots,$$
$$x_n = q \sin x_{n-1} + a, \qquad x_{n+1} = q \sin x_n + a, \ldots$$

Вычитая из второго из этих равенств почленно первое, получим:

$$x_2 - x_1 = q(\sin x_1 - \sin x_0) = 2q \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \cos \frac{x_1 + x_0}{2}.$$

Принимая во внимание, что $|\sin \alpha| \leqslant |\alpha|$ и $|\cos \alpha| \leqslant 1$, получим:

$$|x_2 - x_1| \leqslant 2q \frac{|x_1 - x_0|}{2} = q|x_1 - x_0|. \qquad (10)$$

Совершенно так же можем получить следующее неравенство:

$$|x_3 - x_2| \leqslant q|x_2 - x_1|,$$

или, пользуясь неравенством (10), можем написать:

$$|x_3 - x_2| \leqslant q^2 |x_1 - x_0|.$$

Продолжая подобные вычисления, получим при всяком n неравенство:

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant q^n |x_1 - x_0|. \qquad (11)$$

Рассмотрим теперь разность $x_m - x_n$, считая для определенности $m > n$:

$$x_m - x_n = x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + x_{m-2} - x_{m-3} + \ldots + x_{n+1} - x_n.$$

Пользуясь неравенством (11) и формулой для суммы членов геометрической прогрессии, будем иметь:

$$|x_m - x_n| \leqslant |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + |x_{m-2} - x_{m-3}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \leqslant$$
$$\leqslant (q^{m-1} + q^{m-2} + q^{m-3} + \ldots + q^n) |x_1 - x_0| = q^n \frac{1 - q^{m-n}}{1 - q} |x_1 - x_0|.$$

При беспредельном увеличении n множитель q^n стремится к нулю [26]; множитель $|x_1 - x_0|$ постоянный: дробь $\frac{1 - q^{m-n}}{1 - q}$ всегда заключается между нулем и $\frac{1}{1-q}$, т. е. ограничена, ибо, при $m > n$, q^{m-n} заключается между нулем и единицей. Таким образом, при беспредельном увеличении n и любом $m > n$ разность $x_m - x_n$ стремится к нулю, и условие (9) выполнено. Мы можем, согласно условию Коши, утверждать, что существует предел:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \xi.$$

В равенстве

$$x_{n+1} = q \sin x_n + a$$

будем беспредельно увеличивать n. Пользуясь непрерывностью функции $\sin x$[1]), в пределе получим:

$$\xi = q \sin \xi + a, \qquad (12)$$

т. е. предел ξ переменной x_n и есть корень уравнения Кеплера.

При построении последовательности x_n мы исходим из произвольного числа x_0. Однако покажем, что уравнение Кеплера не может иметь двух различных корней, т. е. что $\lim x_n = \xi$ не зависит от выбора x_0 и равняется *единственному* корню уравнения Кеплера.

Положим, что, кроме найденного корня ξ, оно имеет корень ξ_1, т. е.

$$\xi_1 = q \sin \xi_1 + a.$$

Вычитая из этого уравнения почленно уравнение (12), получим:

$$\xi_1 - \xi = q (\sin \xi_1 - \sin \xi) = 2q \sin \frac{\xi_1 - \xi}{2} \cos \frac{\xi_1 + \xi}{2},$$

откуда, как и раньше,

$$|\xi_1 - \xi| \leqslant q |\xi_1 - \xi|.$$

Но q заключается между нулем и единицей, и написанное соотношение может иметь место только при $\xi_1 - \xi = 0$, т. е. $\xi_1 = \xi$, и, следовательно, уравнение Кеплера имеет только один корень ξ.

---

[1]) Определение непрерывности дано ниже [34].

32. Одновременное изменение двух переменных величин, связанных функциональной зависимостью. Рассмотрим две переменные x и y, связанные функциональной зависимостью

$$y = f(x),$$

и пусть функция $f(x)$ определена слева и справа от точки $x = c$. Предположим, что переменная x стремится к c, возрастая и проходя через все вещественные значения, но не достигая значения c, т. е. $x \to c - 0$ [27]. При этом $f(x)$ есть упорядоченная переменная. Положим, что она имеет предел A.

Обычно это записывают следующим образом:

$$\lim_{x \to c-0} y = \lim_{x \to c-0} f(x) = A. \tag{13}$$

Аналогично, если x, убывая и проходя через все вещественные значения, стремится к c, т. е. $x \to c + 0$ [27], и при этом $f(x)$ стремится к пределу, равному B, то это записывают так:

$$\lim_{x \to c+0} y = \lim_{x \to c+0} f(x) = B. \tag{14}$$

Существование предела (13) равносильно, очевидно, тому, что $f(x)$ становится сколь угодно близким к числу A, когда x достаточно приближается к числу c, оставаясь меньше c, т. е. (13) равносильно следующему: *при любом заданном положительном числе* ε *существует такое положительное число* η, *что*

$$|A - f(x)| < \varepsilon \text{ как только } 0 < c - x < \eta.$$

Число η зависит, конечно, от ε.

Совершенно аналогично (14) равносильно следующему: *при любом заданном положительном числе* ε *существует такое положительное число* η, *что*

$$|B - f(x)| < \varepsilon \text{ как только } 0 < x - c < \eta.$$

Существование равных пределов $A = B$ равносильно тому, что при $x \to c$ [27] упорядоченная переменная $f(x)$ имеет предел A:

$$\lim_{x \to c} y = \lim_{x \to c} f(x) = A. \tag{15}$$

При этом неважно, с какой стороны от c находится x, и (15) равносильно следующему: при любом заданном положительном числе ε существует такое положительное число η, что

$$|A - f(x)| < \varepsilon \text{ как только } |c - x| < \eta \text{ и } x \neq c. \tag{16}$$

Часто предел (13) обозначают символом $f(c-0)$ и предел (14) — символом $f(c+0)$:

$$\lim_{x\to c-0} f(x)=f(c-0); \qquad \lim_{x\to c+0} f(x)=f(c+0).$$

Не следует смешивать символы $f(c-0)$ и $f(c+0)$ с $f(c)$, т. е. со значением $f(x)$ при $x=c$. Это последнее значение может отличаться от $f(c-0)$ и $f(c+0)$ или $f(x)$ может не быть определена при $x=c$. Для функций, которые имеют непрерывные графики без разрыва, пределы $f(c-0)$ и $f(c+0)$ существуют, и мы имеем, очевидно: $f(c-0)=f(c+0)=f(c)$, т. е.

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c).$$

В этом случае говорят, что *функция* $f(x)$ *непрерывна при* $x=c$ *(в точке* $x=c$*)*. В дальнейшем мы подробно рассмотрим свойства непрерывных функций.

Вернемся к общему случаю. Предыдущие определения обобщаются легко и на тот случай, когда y стремится к бесконечности. На основании сказанного легко, например, видеть, что

$$\lim_{x\to c-0} \frac{1}{x-c}=-\infty; \quad \lim_{x\to c+0} \frac{1}{x-c}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x=+\infty; \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x=-\infty.$$

Рассматривая главное значение функции $y=\operatorname{arc\,tg} x$ [24], можем написать:

$$\lim_{x\to c-0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x-c}=-\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x\to c+0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x-c}=\frac{\pi}{2}.$$

Если $f(x)$ определена при всех достаточно больших x, то может существовать предел:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=A.$$

Если $f(x)$ определена для всех x, достаточно больших по абсолютной величине как положительных, так и отрицательных, то может существовать предел

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A.$$

Последнее равносильно следующему: при любом заданном положительном числе ε существует такое положительное число M, что

$$|A-f(x)|<\varepsilon \quad \text{при} \quad |x|>M.$$

Нетрудно проверить справедливость следующих равенств:

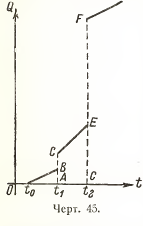
$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty; \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0; \qquad \lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{3x^2+x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{3};$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Рассмотрим еще один физический пример. Положим, что мы нагреваем некоторое твердое тело, и пусть t_0 его начальная температура. При нагревании температура тела будет повышаться, пока не достигнет точки плавления. При дальнейшем нагревании температура будет оставаться неизменной до тех пор, пока тело не перейдет целиком в жидкое состояние, а затем опять начнется повышение температуры образовавшейся жидкости. Аналогичная картина произойдет и при превращении жидкости в газообразное состояние. Будем рассматривать количество сообщенного телу тепла Q как функцию температуры. На черт. 45 изображен график этой функции, причем на горизонтальной оси откладывается температура, а на вертикальной — количество поглощенного тепла. Пусть t_1 — температура, при которой тело начинает переходить в жидкое состояние, и t_2 — температура, при которой жидкость начинает переходить в газообразное состояние. Очевидно:



Черт. 45.

$$\lim_{t\to t_1-0} Q = \text{орд. } \overline{AB} \quad \text{и} \quad \lim_{t\to t_1+0} Q = \text{орд. } \overline{AC}.$$

Величина отрезка $\overline{BC}$ дает скрытую теплоту плавления, а величина отрезка $\overline{EF}$ — скрытую теплоту парообразования.

Если пределы $f(c-0)$ и $f(c+0)$ существуют и различны, то разность $f(c+0)-f(c-0)$ называется разрывом, или скачком, функции $f(x)$ при $x=c$ (в точке $x=c$).

Функция $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x-c}$ имеет при $x=c$ скачок π. Только что рассмотренная функция $Q(t)$ имеет в точке плавления $t=t_1$ скачок, равный скрытой теплоте плавления.

При определении предела $f(x)$ при стремлении x к c мы считали, что x стремится к c, никогда с ним не совпадая. Эта оговорка существенна, потому что значение $f(x)$ при $x=c$ иногда или не существует, или не имеет ничего общего со значениями $f(x)$ при x, близких к c. Так, например, функция $Q(t)$ не определена при $t=t_1$.

Рассмотрим еще пример для пояснения сказанного. Положим, что на промежутке $(-1, +1)$ функция определена следующим образом:

$$y=x+1 \text{ при } -1 \leqslant x<0;$$
$$y=x-1 \text{ при } \quad 0<x \leqslant 1;$$
$$y=0 \qquad \text{при} \quad x=0.$$

Черт. 46.

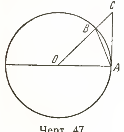
На черт. 46 воспроизведен график этой функции, состоящий из двух отрезков прямых, из которых исключены конечные точки (при $x=0$), и одной отдельной точки — начала координат. В этом случае мы будем иметь:

$$\lim_{x \to -0} f(x)=1; \quad \lim_{x \to +0} f(x)=-1; \quad f(0)=0.$$

33. Пример. Рассмотрим пример, важный для дальнейшего. Положим

$$y=\frac{\sin x}{x}.$$

Эта функция определена при всех x, кроме $x=0$, ибо при этом и числитель и знаменатель обращаются в нуль, и дробь теряет смысл.



Черт. 47.

Исследуем изменение y при стремлении x к нулю. При изменении знака x величина дроби не меняется, так что достаточно найти предел дроби при стремлении x к нулю со стороны положительных значений, т. е. из первой четверти. Этот предел, как мы покажем, существует. Тот же предел, в силу сказанного выше, получится и при стремлении x к нулю со стороны отрицательных значений. Заметим, что теорему о пределе частного применить нельзя, ибо знаменатель стремится к нулю при $x \to 0$.

Будем рассматривать x как центральный угол в круге радиуса единица. Принимая во внимание, что пл. $\triangle AOB <$ пл. сектора $AOB <$ $<$ пл. $\triangle AOC$, получим

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

откуда, деля на $\frac{\sin x}{2}$, получим:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

или

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \tag{17}$$

Но при стремлении x к нулю $\cos x$, выражаемый отрезком $\overline{OC}$, стремится, очевидно, к единице, т. е. переменная $\frac{\sin x}{x}$ постоянно заключается между единицей и величиной, стремящейся к единице, а потому [**27**]:

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Определим для данного случая число η, которое встречается в условии (16).

Из неравенства (17), вычитая из единицы его три части, получаем:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x,$$

а это неравенство показывает, что

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < \varepsilon,$$

если

$$|1 - \cos x| < \varepsilon.$$

Принимая во внимание, что синус дуги первой четверти меньше самой дуги, получим:

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

и достаточно выбрать:

$$\frac{x^2}{2} < \varepsilon, \text{ т. е. } |x| < \sqrt{2\varepsilon}.$$

Итак, в данном случае $\sqrt{2\varepsilon}$ может играть роль числа η.

34. Непрерывность функции. Мы уже приводили определение непрерывности функции в точке $x = c$, если функция $f(x)$ определена в этой точке и вблизи нее слева и справа. Приведем его еще раз.

Определение. *Функция* $f(x)$ *называется непрерывной при* $x = c$ *(в точке* $x = c$*), если существует предел* $f(x)$ *при* $x \to c$ [**27**] *и если этот предел равен* $f(c)$:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = f(\lim x). \tag{18}$$

Напомним, что это равносильно тому, что *существуют пределы* $f(c-0)$ *и* $f(c+0)$ *слева и справа, и* что *эти пределы равны между собою и равны* $f(c)$, т. е. $f(c-0)=f(c+0)=f(c)$. Иначе данное выше определение, как мы видели [32], равносильно следующему: *при любом заданном положительном числе* ε *существует такое положительное число* η, *что*

$$|f(c)-f(x)|<\varepsilon \text{ при } |c-x|<\eta. \tag{19}$$

Отметим, что ввиду произвольности выбора положительного числа ε можно в этом определении вместо $|f(c)-f(x)|<\varepsilon$ писать $|f(c)-f(x)|\leqslant\varepsilon$. Это же замечание относится и ко всем предыдущим аналогичным определениям и, в частности, к определению бесконечно малой величины и предела, а также и к последующим определениям, аналогичным определению, высказанному выше.

Разность $x-c$ есть приращение независимой переменной, а разность $f(x)-f(c)$ есть соответствующее приращение функции, и поэтому указанное определение непрерывности функции равносильно следующему: *функция называется непрерывной в точке* $x=c$, *если бесконечно малому приращению независимой переменной (от начального значения* $x=c$*) соответствует бесконечно малое приращение функции.*

Заметим, что свойство непрерывности, выражаемое равенством (18), сводится к возможности находить предел функции простой подстановкой вместо независимой переменной ее предела.

Из формул (3) и (4) [28] мы видим, что целый многочлен от x и частное таких многочленов, т. е. рациональная функция от x, суть функции, непрерывные при любом значении x, кроме тех значений, при которых знаменатель рациональной функции обращается в нуль.

Непрерывной, очевидно, будет и функция $y=b$, сохраняющая при всяком x одно и то же значение [12].

Все элементарные функции, рассмотренные нами в первой главе (степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные круговые), непрерывны при всех значениях x, при которых они существуют, кроме тех значений, при которых они обращаются в бесконечность.

Так, например, $\log_{10} x$ есть непрерывная функция от x при всех положительных значениях x; $\operatorname{tg} x$ есть непрерывная функция от x при всех значениях x, кроме значений

$$x=(2k+1)\frac{\pi}{2},$$

где k есть любое целое число.

Отметим еще функцию u^v, где u и v суть непрерывные функции от x, причем предполагается, что u не принимает отрицательных значений. Такая функция называется *степенно-показательной.* Она точно так же обладает свойством непрерывности, исключая те

значения x, при которых u и v одновременно равны нулю или $u=0$ и $v<0$.

Высказанное нами утверждение о непрерывности элементарных функций нуждается, конечно, в доказательстве, которое может быть проведено вполне строго, но мы примем это утверждение без доказательства. В дальнейшем мы разберем этот вопрос подробнее.

Нетрудно показать, что *сумма или произведение произвольного конечного числа непрерывных функций есть также непрерывная функция; то же относится и к частному двух непрерывных функций за исключением тех значений независимой переменной, при которых знаменатель обращается в нуль.*

Рассмотрим лишь случай частного. Положим, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны при $x=a$ и что $\psi(a)\neq 0$. Составим функцию:

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Пользуясь теоремой о пределе частного, получим:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}{\lim\limits_{x\to a}\psi(x)}=\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=f(a),$$

что и доказывает непрерывность частного $f(x)$ при $x=a$.

Отметим один простой пример. Раз $y=\sin x$ есть непрерывная функция от x, то $y=b\sin x$, где b — постоянная, также будет непрерывной функцией, так как она является произведением непрерывных функций $y=b$ (см. выше) и $y=\sin x$.

Вернемся теперь еще к функции $y=\frac{\sin x}{x}$. При $x=0$ эта функция неопределенна, но мы знаем, что $\lim\limits_{x\to 0} y=1$. Поэтому, если мы положим $y=1$ при $x=0$, то y будет непрерывной функцией в точке $x=0$.

Подобное нахождение предела функции при стремлении x к ее точке неопределенности называется *раскрытием неопределенности*, а самый предел, если он существует, называют иногда *истинным значением* функции в ее упомянутой точке неопределенности. В дальнейшем мы будем иметь много примеров раскрытия неопределенностей.

35. Свойства непрерывных функций. Выше мы определили свойство непрерывности функции при заданном значении x. Положим теперь, что функция определена в конечном промежутке $a\leqslant x\leqslant b$. *Если она непрерывна при любом значении x из этого промежутка, то говорят, что она непрерывна в промежутке* (a, b). Заметим при этом, что непрерывность функции на концах промежутка $x=a$ и $x=b$ состоит в следующем:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a),\qquad \lim_{x\to b-0} f(x)=f(b).$$

Все непрерывные функции обладают следующими свойствами:

1. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в промежутке* (a, b), *то существует в этом промежутке, по крайней мере, одно такое значение* x, *при котором* $f(x)$ *принимает свое наибольшее значение и, по крайней мере, одно такое значение* x, *при котором функция принимает свое наименьшее значение.*

2. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в промежутке* (a, b), *причем* $f(a)=m$ *и* $f(b)=n$, *и если* k — *любое число, заключающееся между* m *и* n, *то существует в промежутке* (a, b), *по крайней мере, одно такое значение* x, *при котором значение* $f(x)$ *равно* k; *в частности, если* $f(a)$ *и* $f(b)$ *разных знаков, то существует внутри промежутка* (a, b), *по крайней мере, одно такое значение* x, *при котором* $f(x)$ *обращается в нуль.*

Эти два свойства становятся непосредственно ясными, если принять во внимание, что в случае непрерывности функции соответствующий ей график будет представлять собою непрерывную кривую. Это замечание не может, конечно, служить доказательством. Самое понятие о непрерывной кривой, наглядное с первого взгляда, оказывается чрезвычайно сложным при ближайшем его рассмотрении. Строгое доказательство указанных двух свойств, так же как и следующего, третьего, основано на теории иррациональных чисел. Мы примем эти свойства без доказательства.

В последних номерах настоящего параграфа мы выясним основы теории иррациональных чисел и связь этой теории с теорией пределов и свойствами непрерывных функций. Заметим, что второе свойство непрерывных функций можно еще формулировать так: при непрерывном изменении x от a до b непрерывная функция $f(x)$ проходит, по крайней мере, один раз через все числа, лежащие между $f(a)$ и $f(b)$.

На черт. 48 и 49 изображен график непрерывной в промежутке (a, b) функции, у которой $f(a)<0$ и $f(b)>0$. На черт. 48 график один раз пересекает ось OX, и при соответствующем значении x функция $f(x)$ обращается в нуль. В случае черт. 49 таких значений будет не одно, а три.

Мы переходим теперь к третьему свойству непрерывных функций, которое является менее наглядным, чем два предшествующих.

3. Если $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b) и если $x=x_0$ есть некоторое значение x из этого промежутка, то в силу условия (19) [34] (заменяя c на x_0) для любого заданного положительного ε существует такое η, зависящее, очевидно, от ε, что

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon, \text{ если } |x-x_0|<\eta,$$

причем мы считаем, конечно, x также принадлежащим промежутку (a, b). (Если, например, $x_0=a$, то x обязательно больше a, а если $x_0=b$, то $x<b$.) Но число η может зависеть не только от ε, но

и от того, какое именно значение $x=x_0$ из промежутка (a, b) мы рассматриваем. Третье свойство непрерывных функций заключается в том, что на самом деле для любого заданного ε существует одно и то же η для всех значений x_0 из промежутка (a, b). Иными словами, *если $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b), то для любого заданного положительного ε существует такое положительное η, что*

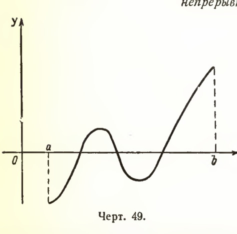
$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon \qquad (20)$$

для любых двух значений x' и x'' из промежутка (a, b), удовлетворяющих неравенству

$$|x''-x'|<\eta. \qquad (21)$$

Черт. 48.

Это свойство называется *равномерной непрерывностью*. Таким образом, *если функция непрерывна в промежутке (a, b), то она будет равномерно непрерывна в этом промежутке.*



Черт. 49.

Отметим еще раз, что мы предполагаем функцию $f(x)$ непрерывной не только для всех x, лежащих внутри промежутка (a, b), но и для значений $x=a$ и $x=b$.

Мы поясним свойства равномерной непрерывности еще на одном простом примере. Предварительно перепишем предыдущие неравенства в другом виде, заменяя букву x' на x и x'' на $(x+h)$. При этом $x''-x'=h$ представляет собою приращение независимой переменной и $f(x+h)-f(x)$ — соответствующее приращение функции. Свойство равномерной непрерывности запишется так:

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon, \quad \text{если} \quad |h|<\eta,$$

где x и $(x+h)$ — любые две точки из промежутка (a, b).

Для примера рассмотрим функцию

$$f(x)=x^2.$$

В данном случае мы имеем:

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=2xh+h^2.$$

При любом заданном значении x выражение $(2xh+h^2)$, дающее приращение нашей функции, стремится, очевидно, к нулю, если приращение независимой переменной стремится к нулю. Этим еще раз подтверждается [**34**], что взятая функция непрерывна при всяком значении x. Тем самым она будет непрерывна, например, в промежутке $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Покажем, что она будет равномерно непрерывна в этом промежутке. Нам надо удовлетворить неравенству

$$|2xh+h^2| < \varepsilon \tag{22}$$

соответствующим подбором числа η в неравенстве $|h| < \eta$, причем x и $(x+h)$ должны принадлежать промежутку $(-1, 2)$. Мы имеем:

$$|2xh+h^2| \leqslant |2xh| + h^2 = 2|x||h| + h^2.$$

Но наибольшее значение $|x|$ в промежутке $(-1, 2)$ равно двум, и потому мы можем заменить предыдущее неравенство более сильным.

$$|2xh+h^2| \leqslant 4|h| + h^2.$$

Будем считать во всяком случае $|h| < 1$. При этом $h^2 < |h|$, и мы можем переписать предыдущее неравенство в виде:

$$|2xh+h^2| < 4|h| + |h|$$

или

$$|2xh+h^2| < 5|h|.$$

Неравенство (22) будет, наверное, удовлетворено, если мы подчиним $|h|$ условию $5|h| < \varepsilon$. Таким образом, h должно удовлетворять двум неравенствам:

$$|h| < 1 \quad \text{и} \quad |h| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Следовательно, за число η мы можем взять наименьшее из двух чисел 1 и $\frac{\varepsilon}{5}$. При малых ε (а именно при $\varepsilon < 5$) мы должны взять $\eta = \frac{\varepsilon}{5}$, и во всяком случае очевидно, что найденное η будет, при заданном ε, одним и тем же для всех x из промежутка $(-1, 2)$.

Указанные свойства могут уже не иметь места в случае разрывных функций или функций, непрерывных только внутри промежутка. Рассмотрим функцию, график которой изображен на черт. 46. Она определена на промежутке $(-1, +1)$ и имеет разрыв при $x = 0$. Среди ее значений имеются сколь угодно близкие к единице, но она не принимает значения, равного единице, и значений, бо́льших единицы. Таким образом, среди значений этой функции нет наибольшего. Точно так же среди этих значений нет и наименьшего. Элементарная функция $y = x$ не принимает внутри промежутка $(0, 1)$ ни наибольшего, ни наименьшего значения. Если рассматривать эту же функцию в замкнутом промежутке $(0, 1)$, то она будет достигать своего наименьшего значения при $x = 0$ и наибольшего при $x = 1$. Рассмотрим еще функцию $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, непрерывную в промежутке $0 < x \leqslant 1$, открытом слева. При стремлении x к нулю аргумент $\frac{1}{x}$ беспредельно растет, и $\sin\frac{1}{x}$ колеблется между (-1) и $(+1)$ и не имеет предела

при $x \to +0$. Покажем, что указанная функция не обладает равномерной непрерывностью в промежутке $0 < x \leqslant 1$. Рассмотрим два значения: $x' = \frac{1}{n\pi}$ и $x'' = \frac{2}{(4n+1)\pi}$, где n — целое положительное число. Оба они принадлежат упомянутому промежутку при любом выборе n. Далее, мы имеем:

$$f(x') = \sin n\pi = 0;$$

$$f(x'') = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Таким образом:

$$f(x'') - f(x') = 1$$

и

$$x'' - x' = \frac{2}{(4n+1)\pi} - \frac{1}{n\pi}.$$

При беспредельном возрастании целого положительного числа n разность $x'' - x'$ стремится к нулю, а разность $f(x'') - f(x')$ остается равной единице. Отсюда видно, что не существует положительного η для промежутка $0 < x \leqslant 1$ такого, что из (21) следует $|f(x'') - f(x')| < 1$; это соответствует выбору $\varepsilon = 1$ в формуле (20).

Возьмем функцию $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. При $x \to +0$ первый множитель x стремится к нулю, а второй $\sin \frac{1}{x}$ не превышает единицы по абсолютной величине, а потому [32] $f(x) \to 0$ при $x \to +0$. При $x = 0$ второй множитель не имеет смысла, но если мы дополним определение нашей функции, положив $f(0) = 0$, т. е. будем считать $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ при $0 < x \leqslant 1$ и $f(0) = 0$, то получим функцию, непрерывную в замкнутом промежутке (0, 1). Функции $\sin \frac{1}{x}$ и $x \sin \frac{1}{x}$ обладают, очевидно, непрерывностью при любом x, отличном от нуля.

36. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших величин. Если α и β — две величины, стремящиеся одновременно к нулю, то теорема о пределе частного неприменима при отыскании предела отношения $\frac{\beta}{\alpha}$. Мы будем считать, что переменные α и β, стремящиеся к нулю, не принимают значения нуль. Если отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ стремится к пределу, конечному и отличному от нуля, то и отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ стремится к пределу, конечному и отличному от нуля. В этом случае говорят, что β и α — *бесконечно малые одного и того же порядка*. Если предел отношения $\frac{\beta}{\alpha}$ оказывается равным нулю, то говорят, что β — бесконечно малая *высшего порядка* по сравнению

с α или что α — бесконечно малая *низшего порядка* по сравнению с β. Если отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ стремится к бесконечности, то $\frac{\alpha}{\beta}$ стремится к нулю, т. е. β будет низшего порядка по сравнению с α и α высшего порядка по сравнению с β. Легко показать, что *если α и β бесконечно малые одного и того же порядка и γ бесконечно малая высшего порядка по отношению к α, то она бесконечно малая высшего порядка и по отношению к β*. По условию $\frac{\gamma}{\alpha} \to 0$, и отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ имеет предел, конечный и отличный от нуля. Из очевидного равенства $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$, в силу теоремы о пределе произведения, непосредственно следует, что $\frac{\gamma}{\beta} \to 0$, что и доказывает наше утверждение.

Отметим важный частный случай бесконечно малых одного и того же порядка. Если $\frac{\alpha}{\beta} \to 1$ $\left(\text{при этом и } \frac{\beta}{\alpha} \to 1\right)$, то бесконечно малые α и β называются *эквивалентными*. Из равенства $\frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} - 1$ непосредственно следует, что *эквивалентность α и β равносильна тому, что разность $\beta - \alpha$ есть бесконечно малая высшего порядка по отношению к α*. Из равенства $\frac{\beta - \alpha}{\beta} = 1 - \frac{\alpha}{\beta}$ точно так же следует, что эквивалентность равносильна тому, что $\beta - \alpha$ есть бесконечно малая высшего порядка по отношению к β.

Если отношение $\frac{\beta}{\alpha^k}$, где k — постоянное положительное число, стремится к пределу, конечному и отличному от нуля, то говорят, что β бесконечно малая порядка k по сравнению с α. Если $\frac{\beta}{\alpha^k} \to c$, где c — число, отличное от нуля, то $\frac{\beta}{c\alpha^k} \to 1$, т. е. β и $c\alpha^k$ — эквивалентные бесконечно малые, и, следовательно, разность $\gamma = \beta - c\alpha^k$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с β (или по сравнению с $c\alpha^k$). Если принять α за основную бесконечно малую, то равенство $\beta = c\alpha^k + \gamma$, где γ — бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $c\alpha^k$, представляет собой выделение из бесконечно малой β бесконечно малого слагаемого $c\alpha^k$ (простейшего вида по отношению к α), так что остаток γ есть уже бесконечно малая высшего порядка по сравнению с β (или по сравнению с $c\alpha^k$).

Аналогичным образом производится сравнение бесконечно больших величин u и v. Если $\frac{v}{u}$ стремится к пределу, конечному и отличному от нуля, то говорят, что u и v бесконечно большие величины одного и того же порядка. Если $\frac{v}{u} \to 0$, то $\frac{u}{v} \to \infty$. В этом

случае говорят, что v бесконечно большая низшего порядка по сравнению с u или что u бесконечно большая высшего порядка по сравнению с v. Если $\frac{v}{u} \to 1$, то бесконечно большие называются эквивалентными. Если $\frac{v}{u^k}$, где k — постоянное, положительное число, имеет предел, конечный и отличный от нуля, то говорят, что v бесконечно большая k-го порядка по сравнению с u. Все сказанное выше о бесконечно малых имеет место и для бесконечно больших.

Отметим еще, что если отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ или $\frac{v}{u}$ вовсе не имеет предела, то соответствующие бесконечно малые или бесконечно большие называются несравнимыми.

37. Примеры.

1. Выше мы видели, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

т. е. $\sin x$ и x суть эквивалентные бесконечно малые, и, следовательно, разность $\sin x - x$ есть бесконечно малая высшего порядка по отношению к x. Дальше мы увидим, что эта разность эквивалентна $-\frac{1}{6}x^3$, т. е. является бесконечно малой третьего порядка по сравнению с x.

2. Покажем, что разность $1 - \cos x$ есть бесконечно малая второго порядка по отношению к x. Действительно, применяя известную тригонометрическую формулу и элементарные преобразования, получим:

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Если $x \to 0$, то $\alpha = \frac{x}{2}$ также стремится к нулю, и, как мы показали:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1,$$

и, следовательно,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

т. е. действительно, $1 - \cos x$ бесконечно малая второго порядка по сравнению с x.

3. Из формулы

$$\sqrt{1 + x} - 1 = \frac{x}{\sqrt{1 + x} + 1}$$

следует:

$$\frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1 + x} + 1},$$

откуда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2},$$

т. е. $\sqrt{1+x}-1$ и x суть бесконечно малые одного порядка, причем $\sqrt{1+x}-1$ эквивалентна $\frac{1}{2}x$.

4. Докажем, что полином степени $m>1$ есть бесконечно большая порядка m по сравнению с x. Действительно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{x^m}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{a_m}{x^m}\right)=a_0.$$

Нетрудно видеть, что два полинома одной и той же степени, при $x\to\infty$, суть бесконечно большие одного и того же порядка. Их отношение имеет пределом отношение их старших коэффициентов. Например:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x-3}{7x^2+2x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{7+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{5}{7}.$$

Если степени двух полиномов различны, то при $x\to\infty$ тот из полиномов будет бесконечно большой высшего порядка по сравнению с другим, степень которого больше.

38. Число e. Рассмотрим один важный для дальнейшего пример переменной величины, а именно, рассмотрим переменную, принимающую значения:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

где n, возрастая, принимает целые положительные значения и стремится, таким образом, к $+\infty$. Применяя формулу бинома Ньютона, получим:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+$$
$$+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots2\cdot1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}=$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Написанная сумма содержит $(n+1)$ положительных слагаемых. При увеличении целого числа n, во-первых, увеличится число слагаемых и, во-вторых, каждое из прежних слагаемые также увеличится, так как в выражении общего члена:

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^{1)}$$

$k!$ остается без изменения, а разности, стоящие в круглых скобках, увеличатся при увеличении n. Таким образом, мы видим, что рассматриваемая переменная при увеличении n увеличивается, и для того, чтобы убедиться в существовании предела этой переменной, достаточно доказать, что она ограничена.

Заменим в выражении общего члена каждую из упомянутых разностей единицей, а все множители, входящие в $k!$, начиная с 3, заменим на 2. От такой замены общий член увеличится, и мы будем иметь, применяя формулу для суммы членов геометрической прогрессии:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

т. е. переменная $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ограничена. Обозначим предел этой переменной буквой e:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \quad (n \text{ — целое положительное}). \tag{23}$$

Этот предел не может быть, очевидно, больше 3.

Докажем теперь, что выражение $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ будет стремиться к тому же пределу e, если x будет стремиться к $+\infty$, принимая любые значения.

---

[1]) Произведение $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$ получается из дроби

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^k},$$

если каждый из k сомножителей, стоящих в числителе, разделить на n, принимая во внимание, что число сомножителей n в знаменателе также равно k.

Пусть n — наибольшое целое число, заключающееся в x, т. е.

$$n \leqslant x < n+1.$$

Число n стремится, очевидно, вместе с x к $+\infty$. Принимая во внимание, что при увеличении положительного основания, большего единицы, и показателя степени увеличивается и сама степень, можем написать:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \qquad (24)$$

Но в силу равенства (23):

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

и

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = e\cdot 1 = e.$$

Таким образом, крайние члены неравенства (24) стремятся к пределу e, а потому к тому же пределу должен стремиться и средний член, т. е.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (25)$$

Рассмотрим теперь тот случай, когда x стремится к $-\infty$. Введем вместо x новую переменную y, полагая

$$x = -1-y,$$

откуда

$$y = -1-x.$$

Из последнего равенства видно, что, при стремлении x к $-\infty$, y стремится к $+\infty$.

Совершая в выражении $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ замену переменных и принимая во внимание равенство (25), получим:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{-y}{-1-y}\right)^{-1-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1+y}{y}\right)^{1+y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(1+\frac{1}{y}\right)\right] = e\cdot 1 = e.$$

Если x стремится к ∞, имея любые знаки, т. е. $|x| \to +\infty$, то из предыдущего следует, что и в этом случае:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{26}$$

Впоследствии мы покажем удобный путь для вычисления числа e с любой степенью точности. Число это, как оказывается, есть число иррациональное и с точностью до седьмого десятичного знака оно выражается так: $e = 2{,}7182818\ldots$

Нетрудно теперь найти предел выражения $\left(1 + \frac{k}{x}\right)^x$, где k — данное число. Пользуясь непрерывностью степенной функции, получим:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k =$$

$$= \lim_{y \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^k = e^k,$$

где буквою y обозначено частное $\frac{x}{k}$, стремящееся к бесконечности одновременно с x.

Выражения вида $\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$ встречаются в теории так называемых сложных процентов.

Предположим, что приращение капитала происходит ежегодно. Если капитал a отдан из p процентов годовых, то по истечении года наращенный капитал будет:

$$a(1 + k),$$

где

$$k = \frac{p}{100};$$

по прошествии второго года он будет:

$$a(1 + k)^2,$$

и, вообще, по прошествии m лет он будет:

$$a(1 + k)^m.$$

Положим теперь, что приращение капитала происходит через $\frac{1}{n}$ часть года. При этом число k уменьшится в n раз, так как процентная такса p рассчитана на год, а число промежутков времени увеличится в n раз, и наращенный капитал через m лет будет:

$$a\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{mn}.$$

Пусть, наконец, n увеличивается беспредельно, т. е. приращение капитала происходит через все меньшие промежутки времени и в пределе — непрерывно. По прошествии m лет наращенный капитал будет:

$$\lim_{n \to \infty} a\left(1+\frac{k}{n}\right)^{mn} = \lim_{n \to \infty} a\left[\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n}\right]^{m} = ae^{km}.$$

Примем число e за основание логарифмов. Такие логарифмы называются *натуральными логарифмами* и их обычно обозначают просто знаком log без указания основания.

При стремлении переменной x к нулю в выражении $\frac{\log(1+x)}{x}$ числитель и знаменатель стремятся к нулю. Раскроем эту неопределенность. Введем новую переменную y, полагая

$$x = \frac{1}{y}, \text{ т. е. } y = \frac{1}{x},$$

откуда видно, что, при $x \to 0$, y стремится к бесконечности. Введя эту новую переменную и пользуясь непрерывностью функции $\log x$ при $x > 0$ и формулой (26), получим:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{y \to \infty} y \log\left(1+\frac{1}{y}\right) = \lim_{y \to \infty} \log\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = \log e = 1.$$

Из этого ясна целесообразность сделанного выбора основания логарифмов. Точно так же, как при радианном измерении углов, истинное значение выражения $\frac{\sin x}{x}$ при $x=0$ равно единице, *в случае натуральных логарифмов истинное значение выражения* $\frac{\log(1+x)}{x}$ *при* $x=0$ *тоже равно единице.*

Из определения логарифмов вытекает следующее соотношение:

$$N = a^{\log_a N}.$$

Логарифмируя это соотношение по основанию e, получим:

$$\log N = \log_a N \cdot \log a \text{ или } \log_a N = \log N \cdot \frac{1}{\log a}.$$

Соотношение это выражает логарифм числа N при любом основании a через его натуральный логарифм. Множитель $M = \frac{1}{\log a}$ называется *модулем* системы логарифмов с основанием a, и при $a = 10$ он выражается с точностью до седьмого десятичного знака так:

$$M = 0{,}4342945\ldots$$

39. Недоказанные предложения. При изложении теории пределов мы оставили недоказанными несколько предложений, которые сейчас перечислим: существование предела у монотонной ограниченной переменной [**30**], необходимое и достаточное условие

существования предела (признак Коши) [31] и три свойства непрерывных в замкнутом промежутке функций [35]. Доказательство этих предложений основывается на теории вещественных чисел и действий над ними. Изложению этой теории и доказательству упомянутых выше предложений будут посвящены следующие номера.

Введем еще одно новое понятие и формулируем еще одно предложение, которое также будет доказано ниже. Если мы имеем множество, состоящее из конечного числа вещественных чисел (например, мы имеем тысячу вещественных чисел), то среди них будет как наибольшее, так и наименьшее. Если же мы имеем бесконечное множество вещественных чисел и даже таких, что все эти числа принадлежат определенному промежутку, то все же не всегда среди этих чисел будет наибольшее и наименьшее. Например, если мы рассмотрим множество всех вещественных чисел, заключающихся между 0 и 1, но не будем причислять к этому множеству самих чисел 0 и 1, то среди этого множества чисел нет ни наибольшего, ни наименьшего. Какое бы число, близкое к единице, но меньше ее, мы ни взяли, найдется другое число, лежащее между взятым числом и единицей. В данном случае числа 0 и 1, не принадлежащие к взятому множеству чисел, обладают по отношению к нему следующим свойством: среди чисел нашего множества нет чисел, бóльших единицы, но при любом заданном положительном числе ε есть числа, бóльшие $(1-\varepsilon)$. Точно так же среди чисел нашего множества нет чисел, меньших нуля, но при любом заданном положительном числе ε есть числа, меньшие $(0+\varepsilon)$. Эти числа 0 и 1 называются *точной нижней* и *точной верхней границами* указанного выше множества вещественных чисел.

Перейдем от этого примера к общему случаю.

Пусть имеется некоторое множество E вещественных чисел. Говорят, что оно *ограничено сверху*, если существует такое число M, что все числа, принадлежащие множеству E, не превосходят M. Точно так же говорят, что множество *ограничено снизу*, если существует такое число m, что все числа, принадлежащие множеству E, не менее, чем m. Если множество ограничено сверху и снизу, то его просто называют *ограниченным*.

Определение. *Точной верхней границей множества E называют такое число β (если оно существует), что среди чисел, принадлежащих E, нет чисел, бóльших β, но при любом заданном положительном ε есть числа, бóльшие $(\beta-\varepsilon)$. Точной нижней границей множества называется такое число α (если оно существует), что среди чисел, принадлежащих E, нет чисел, меньших α, но при любом заданном положительном ε есть числа, меньшие $(\alpha+\varepsilon)$.*

Если множество E не ограничено сверху, т. е. существуют числа из E, бóльшие любого заданного числа, то множество не может иметь точной верхней границы. Точно так же, если множество E не

ограничено снизу, то оно не может иметь точной нижней границы. Если среди чисел множества есть наибольшее, то оно, очевидно, и является точной верхней границей множества. Точно так же, если среди чисел множества есть наименьшее, то оно и является точной нижней границей множества E. Но, как мы видели, не всегда среди чисел бесконечного множества есть наибольшее или наименьшее. Однако можно показать, что *у множества, ограниченного сверху, всегда имеется точная верхняя граница, а у множества, ограниченного снизу, — точная нижняя граница*. Отметим еще, что из определения точных границ непосредственно следует, что точная верхняя и точная нижняя граница может быть только одна.

Указанными в настоящем номере предложениями мы будем часто пользоваться в дальнейшем. Следующие номера, напечатанные мелким шрифтом, могут быть пропущены при первом чтении.

40. Вещественные числа. Начнем с изложения теории вещественных чисел. Мы исходим из множества всех рациональных чисел, целых и дробных, как положительных, так и отрицательных. Все эти рациональные числа можно себе представить расположенными в порядке их возрастания. При этом, если a и b два любых различных рациональных числа, то между ними можно вставить сколько угодно рациональных чисел. Действительно, пусть $a < b$, и введем положительное рациональное число $r = \frac{b-a}{n}$, где n — какое-нибудь целое положительное число. Рациональные числа $a + r$, $a + 2r$, ..., $a + (n-1)r$ лежат между a и b, и, ввиду произвольности в выборе целого положительного числа n, наше утверждение доказано.

Назовем *сечением в области рациональных чисел* всякое разделение всех рациональных чисел на такие два класса, что любое число одного (первого) класса меньше любого числа другого (второго) класса. При этом, очевидно, если некоторое число находится в первом классе, то и всякое меньшее его число также находится в первом классе, и если некоторое число находится во втором классе, то и всякое большее число также находится во втором классе.

Положим, что среди чисел первого класса есть наибольшее число. При этом, в силу упомянутого свойства совокупности рациональных чисел, можно утверждать, что среди чисел второго класса нет наименьшего числа. Точно так же, если среди чисел второго класса есть наименьшее, то среди чисел первого класса нет наибольшего. Назовем сечение — *сечением первого рода*, если среди чисел первого класса есть наибольшее или среди чисел второго класса есть наименьшее. Легко построить такие сечения. Возьмем какое-нибудь рациональное число b и отнесем к первому классу все рациональные числа, меньшие b, ко второму классу — все рациональные числа, бóльшие b, а само число b отнесем или к первому классу (оно будет там наибольшим) или ко второму классу (оно будет там наименьшим). Беря за b всевозможные рациональные числа, мы получим таким образом всевозможные сечения первого рода. Мы будем говорить, что такое сечение первого рода определяет то рациональное число b, которое является наибольшим в первом или наименьшим во втором классе.

Но существуют и *сечения второго рода*, у которых в первом классе нет наибольшего числа, а во втором классе нет наименьшего числа. Построим пример такого сечения. Отнесем к первому классу все отрицательные рациональные числа, нуль и те положительные рациональные числа, квадрат которых меньше двух, а ко второму классу отнесем все те рациональные

положительные числа, квадрат которых больше двух. Так как не существует рационального числа, квадрат которого равен двум, то все рациональные числа окажутся распределенными, и мы будем иметь некоторое сечение. Покажем, что в первом классе нет наибольшего числа. Для этого достаточно показать, что если число a принадлежит первому классу, то есть числа, бо́льшие a, также принадлежащие первому классу. Если a отрицательно или нуль, то это очевидно; положим, что $a > 0$. По условию составления первого класса $a^2 < 2$. Введем положительное рациональное число $r = 2 - a^2$ и покажем, что можно определить настолько малое положительное рациональное число x, чтобы $(a + x)$ также принадлежало первому классу, т. е. чтобы имелось неравенство:

$$2 - (a + x)^2 > 0 \quad \text{или} \quad r - 2ax - x^2 > 0,$$

т. е. дело сводится к нахождению такого положительного рационального числа, которое удовлетворяет неравенству:

$$x^2 + 2ax < r.$$

Считая $x < 1$, имеем $x^2 < x$, и, следовательно, $x^2 + 2ax < x + 2ax = (2a + 1)\,x$, т. е. нам достаточно удовлетворить неравенству:

$$(2a + 1)\,x < r,$$

таким образом, x определяется из двух неравенств:

$$x < 1 \quad \text{и} \quad x < \frac{r}{2a + 1}.$$

Очевидно, можно найти сколько угодно таких положительных рациональных x, которые удовлетворяют обоим этим неравенствам. Совершенно так же можно показать, что во втором классе построенного сечения нет наименьшего числа. Итак, мы построили пример сечения второго рода. Основным моментом теории является следующее соглашение: мы считаем, что *всякое сечение второго рода определяет некоторый новый объект — иррациональное число*. Разные сечения второго рода определяют разные иррациональные числа. Нетрудно догадаться, что построенный выше пример сечения второго рода определяет то иррациональное число, которое мы обычно обозначаем $\sqrt{2}$.

Можно расставить теперь все введенные таким образом иррациональные числа вместе с прежними рациональными в порядке возрастания, который интуитивно изображается для нас точками направленной оси OX. Если α есть некоторое иррациональное число, то мы обозначим через $\mathrm{I}(\alpha)$ и $\mathrm{II}(\alpha)$ первый и второй классы того сечения, которое определяет иррациональное число α. Мы считаем число α бо́льшим, чем любое число из $\mathrm{I}(\alpha)$, и меньшим, чем любое число из $\mathrm{II}(\alpha)$. Таким образом, любое иррациональное число сравнивается с любым рациональным. Остается определить понятия больше и меньше для любых двух различных иррациональных чисел α и β. Поскольку α и β различны, классы $\mathrm{I}(\alpha)$ и $\mathrm{I}(\beta)$ не совпадают, и один из классов заключается в другом. Положим, что $\mathrm{I}(\alpha)$ заключается в $\mathrm{I}(\beta)$, т. е. всякое число из $\mathrm{I}(\alpha)$ принадлежит $\mathrm{I}(\beta)$, но есть числа из $\mathrm{I}(\beta)$, принадлежащие $\mathrm{II}(\alpha)$. При этом мы по определению считаем $\alpha < \beta$. Таким образом, совокупность всех рациональных и иррациональных чисел, т. е., иначе говоря, *совокупность всех вещественных чисел расположена в порядке*. При этом, пользуясь данными выше определениями, нетрудно показать, что если a, b и c — вещественные числа $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Отметим прежде всего одно элементарное следствие из указанных определений. Пусть α — некоторое иррациональное число. Поскольку в классе $\mathrm{I}(\alpha)$ нет наибольшего, а в классе $\mathrm{II}(\alpha)$ нет наименьшего числа, то непосредственно очевидно, что между α и любым рациональным числом a можно вставить сколько угодно рациональных чисел. Пусть теперь $\alpha < \beta$ — два различных

иррациональных числа. Часть рациональных чисел из I (β) входит в II (α), и отсюда непосредственно следует, что между α и β также можно вставить сколько угодно рациональных чисел, т. е. вообще, *между двумя различными вещественными числами можно вставить сколько угодно рациональных чисел.*

Мы переходим теперь к доказательству основной теоремы теории иррациональных чисел. Рассмотрим совокупность всех вещественных чисел и произведем в ней какое-нибудь сечение, т. е. распределим все вещественные числа (не только рациональные, но и иррациональные) на два класса I и II так, чтобы любое число из I было меньше любого числа из II. Докажем, что при этом обязательно или в классе I будет наибольшее число или в классе II будет наименьшее число (одно исключает другое, как и выше для сечения в области рациональных чисел). Для этого обозначим через I′ совокупность всех рациональных чисел из I и через II′ — совокупность всех рациональных чисел из II. Классы (I′, II′) определяют некоторое сечение в области рациональных чисел, и это сечение определит вещественное число α (рациональное или иррациональное). Положим для определенности, что это число α принадлежит классу I при упомянутом выше распределении всех вещественных чисел на два класса. Покажем, что α должно быть наибольшим числом из класса I. Действительно, если бы это было не так, то существовало бы в классе I вещественное число β, большее α. Возьмем некоторое рациональное число r, лежащее между α и β, т. е. $\alpha < r < \beta$. Оно должно принадлежать классу I и, следовательно, классу I′.

Таким образом, в первом классе сечения (I′, II′), определяющего числа α, находится число r, большее, чем α. Этого быть не может, и, следовательно, наше предположение, что α не наибольшее число класса I — неправильно. Совершенно так же можно показать, что если α попадает в класс II, то оно должно быть там наименьшим числом.

Итак, мы доказали следующую основную теорему:

Основная теорема. *В любом сечении, произведенном в области вещественных чисел, обязательно: или первый класс содержит наибольшее число или второй класс содержит наименьшее число.*

Всем рассуждениям настоящего номера легко придать простой геометрический смысл. Сначала мы рассматриваем на оси OX только точки с рациональными абсциссами. Сечению в области рациональных чисел соответствует разрез прямой OX на две полупрямые. Если разрез происходит в точке с рациональной абсциссой, то получается сечение I рода, причем абсцисса той точки, в которой происходит разрез, причисляется сама или к первому или ко второму классу. Если же разрез производится в точке, которой не соответствует рациональная абсцисса, то получается сечение II рода, определяющее иррациональное число, которое и принимается за абсциссу той точки, в которой произведен разрез. После заполнения таких пустых точек иррациональными абсциссами всякое рассечение прямой происходит уже в точке с некоторой вещественной абсциссой. Все это является лишь геометрической иллюстрацией и не имеет доказательной силы. Нетрудно, пользуясь данным определением иррационального числа α, образовать бесконечную десятичную дробь, соответствующую этому числу [2]. Всякий конечный отрезок этой дроби должен принадлежать I (α), но если мы увеличим на единицу последнюю цифру этого отрезка, то соответствующее рациональное число должно находиться в II (α).

41. Действия над вещественными числами. Теория иррациональных чисел, кроме данных выше определений и основной теоремы, содержит еще определение действий над иррациональными числами и исследование свойств этих действий. При определении действий мы будем руководствоваться сечениями в области рациональных чисел, и, поскольку эти сечения определяют не только иррациональные, но и рациональные числа (сечения первого

рода), определение действий будет годиться вообще для всех вещественных чисел, причем для рациональных чисел они будут совпадать с известными. При изложении настоящего номера мы ограничимся только общими указаниями.

Сделаем предварительно одно замечание. Пусть α — некоторое вещественное число. Возьмем какое-нибудь (малое) рациональное положительное число r, затем рациональное a из I (α) и составим арифметическую прогрессию:

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ \ldots,\ a+nr,\ \ldots$$

При больших n числа $(a+nr)$ попадут в II (α), и, следовательно, будет существовать такое целое положительное k, что $[a+(k-1)r]$ принадлежит I (α) и $(a+kr)$ принадлежит II (α), т. е.:

Замечание. *В любом сечении рациональных чисел существуют в разных классах числа, отличающиеся на любое заданное положительное рациональное число r, как бы мало оно ни было.*

Перейдем теперь к определению сложения. Пусть α и β — два вещественных числа. Пусть a — любое число из I (α), a' — из II (α), b — из I (β) и b' — из II (β). Составим всевозможные суммы $(a+b)$ и $(a'+b')$. Во всяком случае имеем: $a+b<a'+b'$. Составим новое сечение рациональных чисел, относя ко второму классу все рациональные числа, бо́льшие всех $(a+b)$, и относя к первому классу все остальные рациональные числа. При этом любое число первого класса меньше любого числа второго класса, все числа $(a+b)$ отходят в первый класс и все числа $(a'+b')$ — во второй класс. Составленное новое сечение определит некоторое вещественное число, которое мы и назовем суммой $(\alpha+\beta)$. Это число, очевидно, больше или равно всем $(a+b)$ и меньше или равно всем $(a'+b')$. Принимая во внимание, что в силу сделанного выше замечания, числа a и a', а также b и b' могут отличаться друг от друга на любое малое положительное рациональное число, нетрудно показать, что может существовать только одно число, удовлетворяющее указанным выше неравенствам. Непосредственно проверяется, что сложение удовлетворяет обычным законам, известным для рациональных чисел

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha;\quad (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma);\quad \alpha+0=\alpha.$$

Например, чтобы получить $(\beta+\alpha)$, нам надо будет составлять вместо сумм $(a+b)$ и $(a'+b')$ суммы $(b+a)$ и $(b'+a')$, но эти суммы совпадают с прежними, так как переместительный закон сложения для рациональных чисел известен.

Пусть α — некоторое вещественное число. Определим число $(-\alpha)$ следующим сечением: в первый класс относим все рациональные числа из класса II (α) с измененным знаком, а во второй класс — все числа из I (α) с измененным знаком. Таким образом, получится действительно сечение в области рациональных чисел, и для числа $(-\alpha)$, как нетрудно проверить, имеем:

$$-(-\alpha)=\alpha;\quad \alpha+(-\alpha)=0.$$

Нетрудно видеть, что если $\alpha>0$, то $(-\alpha)<0$, и наоборот. Назовем абсолютным значением числа α, отличного от нуля, то из двух чисел α и $(-\alpha)$, которое больше нуля. Обозначим, как и раньше, абсолютное значение числа α символом $|\alpha|$.

Переходим теперь к умножению. Пусть α и β — два положительных вещественных числа, т. е. $\alpha>0$ и $\beta>0$. Пусть a — любое *положительное число* из I (α), b — любое *положительное число* из I (β), a' и b' — любые числа из II (α) и II (β) (они уже обязательно положительны). Составляем новое сечение, относя ко второму классу все рациональные числа, бо́льшие всех произведений ab, и к первому классу — остальные рациональные числа. Все ab попадут в первый класс и все $a'b'$ — во второй класс. Новое сечение определит некоторое вещественное число, которое мы и назовем произве-

дением $\alpha\beta$. Это число больше или равно всем ab и не превосходит всех $a'b'$, и только одно это вещественное число удовлетворяет этим неравенствам.

Если одно из чисел α, β или оба — отрицательны, то мы приводим умножение к предыдущему случаю, вводя в определение умножения обычное правило знаков, т. е. мы полагаем $\alpha\beta = \pm|\alpha|\,|\beta|$, причем берем знак $(+)$, если числа α и β оба меньше нуля, и берем знак $(-)$, если одно из чисел больше нуля, а другое меньше нуля.

При умножении на нуль принимаем определение, что $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$. Непосредственно проверяются основные законы умножения:

$$\alpha\beta = \beta\alpha; \quad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma); \quad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma,$$

и произведение нескольких сомножителей может равняться нулю в том и только в том случае, если хоть один из сомножителей равен нулю.

Вычитание определяется как действие, обратное сложению, т. е. $\alpha - \beta = x$ равносильно $x + \beta = \alpha$. Добавляя к обеим частям этого равенства $(-\beta)$, получим, в силу упомянутых выше свойств сложения: $x = \alpha + (-\beta)$, т. е. разность должна обязательно определяться по этой формуле, и действие вычитания сводится к сложению. Остается проверить, что полученное выражение для x действительно удовлетворяет условию $x + \beta = \alpha$, но это непосредственно вытекает из свойств сложения. Отметим справедливость обычного свойства: неравенство $\alpha > \beta$ равносильно $\alpha - \beta > 0$. Прежде чем переходить к делению, определим число, обратное данному. Если a есть рациональное число, отличное от нуля, то обратным называют число $\frac{1}{a}$. Пусть α — вещественное число, отличное от нуля. Пусть сначала $\alpha > 0$ и пусть a' — любое число из II (α) (оно — рационально и положительно). Определим число, обратное α, следующим сечением: к первому классу отнесем все отрицательные числа, нуль и числа $\frac{1}{a'}$, а ко второму классу — остальные числа. Пусть некоторое положительное число c_1 принадлежит первому классу нового сечения. Это значит, что $c_1 = \frac{1}{a_1'}$, где a_1' — из II (α). Возьмем любое положительное рациональное число $c_2 < c_1$. Его можно представить в виде $c_2 = \frac{1}{a_2'}$, где a_2' — рационально и $a_2' > a_1'$, т. е. a_2' также принадлежит II (α). Иначе говоря, если некоторое положительное число принадлежит первому классу нового сечения, то всякое меньшее рациональное положительное число также принадлежит этому первому классу. Туда же входят по условию все отрицательные числа и нуль. Отсюда видно, что сечение, определяющее число, обратное α, произведено нами с соблюдением того основного условия, что любое число второго класса больше любого числа первого класса. Это число, обратное α, обозначим символом $\frac{1}{\alpha}$.

Если $\alpha < 0$, то мы определим обратное число формулой:

$$\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{|\alpha|}.$$

Пользуясь определением умножения, получим:

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1.$$

Переходим теперь к делению. Это есть действие, обратное умножению, т. е. $\alpha : \beta = x$ равносильно $x\beta = \alpha$, и, как при вычитании, нетрудно показать, что если $\beta \neq 0$, то получается единственное частное: $x = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$, и, таким образом, деление сводится к умножению. Деление на нуль невозможно.

Возведение в целую положительную степень сводится к умножению. Извлечение корня определяется как действие, обратное возведению в степень. Пусть α — вещественное положительное число и n — некоторое целое, большее единицы. Произведем следующее сечение рациональных чисел: к первому классу отнесем все отрицательные числа, нуль и все положительные числа, n-е степени которых меньше α, а ко второму классу — остальные числа. Пользуясь определением умножения, нетрудно показать, что положительное число β, определяемое этим сечением, удовлетворяет условию: $\beta^n = \alpha$, т. е. β является арифметическим значением корня $\sqrt[n]{\alpha}$. Если n — четное, то вторым значением будет $(-\beta)$. Аналогично определяется корень нечетной степени из вещественного отрицательного числа (один ответ). Более подробно о показательной функции будет сказано потом. Отметим еще следующий важный результат: *раз справедливы основные законы действий, то тем самым будут справедливы и все правила и тождества алгебры, если под буквами разуметь вещественные числа.*

42. Точные границы числовых множеств. Признаки существования предела. Докажем теперь теорему о точных границах множества вещественных чисел, которую мы формулировали в [39].

Т е о р е м а. *Если множество E вещественных чисел ограничено сверху, то оно имеет точную верхнюю границу, и если E ограничено снизу, то оно имеет точную нижнюю границу.*

Ограничимся доказательством первой части теоремы. По условию все числа из E меньше некоторого числа M. Произведем сечение вещественных чисел следующим образом: ко второму классу отнесем все числа, большие всех чисел из E, а к первому — остальные вещественные числа. Во второй класс попадут, например, все числа $(M+p)$, где $p \geqslant 0$, а в первый класс попадут, например, все числа из E. Пусть β — вещественное число, определенное произведенным сечением. По основной теореме [40] оно будет наибольшим в первом классе или наименьшим во втором. Покажем, что β и есть точная верхняя граница E. Во-первых, среди E нет чисел, бо́льших β, ибо все числа E попали в первый класс. Далее, наверно существуют числа E, бо́льшие $(\beta - \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, ибо, если бы таких чисел не было, то число $\left(\beta - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ было бы больше всех чисел E и должно было бы попасть во второй класс, а в действительности оно меньше β и находится в первом классе. Теорема, таким образом, доказана. Очевидно, что если β принадлежит E, то оно будет наибольшим из чисел E.

Докажем теперь существование предела у монотонной ограниченной переменной [30]. Итак, пусть переменная x все время возрастает или, по крайней мере, не убывает, т. е. всякое ее значение не меньше любого предыдущего. Пусть, кроме того, x ограничено, т. е. существует такое число M, что все значения x меньше M. Рассмотрим совокупность всех значений x. По доказанной теореме существует точная верхняя граница β для этой совокупности. Покажем, что β и есть предел x. Пусть ε — произвольное положительное число. По определению точной верхней границы найдется значение x, большее $(\beta - \varepsilon)$. Тогда, в силу монотонности, и все последующие значения x будут больше $(\beta - \varepsilon)$, но, с другой стороны, они не могут быть больше β, и, в силу произвольности ε, мы видим, что $\beta = \lim x$. Точно так же можно разобрать и случай убывающей переменной.

Прежде чем переходить к доказательству признака Коши [31], докажем одну теорему, которой мы будем пользоваться.

Т е о р е м а. *Пусть имеется последовательность конечных промежутков:*

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), \ldots$$

причем каждый следующий промежуток заключается в предыдущем, т. е.

$a_{n+1} \geqslant a_n$ и $b_{n+1} \leqslant b_n$, *и пусть длины этих промежутков стремятся к нулю*, т. е. $(b_n - a_n) \to 0$. *При этом концы промежутков a_n и b_n стремятся к общему пределу при возрастании n.*

По условию теоремы мы имеем: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ и, кроме того, $a_n < b_1$ при любом n. Таким образом, последовательность $a_1, a_2, \ldots$ будет монотонной и ограниченной, а потому будет иметь предел: $a_n \to a$. Из условия $(b_n - a_n) \to 0$ вытекает: $b_n = a_n + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$, и, следовательно, b_n имеет предел, также равный a.

Перейдем теперь к доказательству признака Коши. Ограничимся случаем переменной, значения которой можно пронумеровать:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{27}$$

Надо доказать, что необходимое и достаточное условие существования предела последовательности (27) заключается в следующем: для любого заданного положительного ε существует такой значок N, что

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \quad \text{при} \quad m \text{ и } n > N. \tag{28}$$

Покажем, что это условие достаточно, т. е. что при выполнении этого условия последовательность (27) имеет предел. Из наших прежних рассуждений [31] вытекает, что если условие выполнено, то можно построить последовательность промежутков:

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_k, b_k), \ldots$$

со следующими свойствами: каждый следующий заключается в предыдущем, длины $(b_k - a_k)$ стремятся к нулю и всякому интервалу (a_k, b_k) соответствует такое целое положительное число N_k, что все x_s при $s > N_k$ принадлежат (a_k, b_k). Эти интервалы (a_k, b_k) суть отрезки A'_kA_k из [31]. По доказанной выше теореме имеется общий предел:

$$\lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} b_k = a. \tag{29}$$

Покажем, что a и есть предел последовательности (27). Пусть задано положительное число ε. В силу (29) существует такое целое положительное l что промежуток (a_l, b_l) и все следующие промежутки лежат внутри промежутка $(a - \varepsilon, \ a + \varepsilon)$.

Отсюда следует, что и все числа x_s при $s > N_l$ принадлежат этому же промежутку, т. е. $|a - x_s| < \varepsilon$ при $s > N_l$. Ввиду произвольности ε мы видим, что a есть предел последовательности (27), и достаточность условия (28) доказана. Необходимость этого условия была доказана нами раньше [31]. Доказательство остается в силе и для не пронумерованной переменной.

43. Свойства непрерывных функций. Переходя к доказательству формулированных раньше [35] свойств непрерывных функций, начнем с доказательства вспомогательной теоремы.

Теорема I. *Если $f(x)$ — непрерывна в промежутке* (a, b) и задано какое-нибудь положительное число ε, то этот промежуток можно таким образом разбить на конечное число новых промежутков, что $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$, если только x_1 и x_2 принадлежат одному и тому же новому промежутку.*

Будем доказывать от обратного. Предположим, что теорема несправедлива, и придем к нелепости. Итак, пусть невозможно разбить (a, b) на части указанным образом. Делим наш промежуток средней точкой на два промежутка: $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ и $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$. Если бы теорема была справедлива для каждого из этих двух промежутков, то она, очевидно, была бы справедлива и для всего промежутка (a, b). Итак, мы должны считать, что, по крайней

мере, один из двух полученных промежутков нельзя разбить на части указанным в теореме образом. Берем ту половину промежутка, для которой теорема не выполняется, и делим его опять на две равные части. Как и выше, по крайней мере для одной из новых половинок теорема не выполняется. Берем эту половинку, делим ее опять пополам и т. д. Таким образом, мы получаем последовательность промежутков:

$$(a,\ b),\ (a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2),\ \ldots,\ (a_n\ b_n),\ \ldots,$$

из которых каждый следующий есть половина предыдущего, так что длина $(b_n - a_n)$, равная $\frac{b-a}{2^n}$, стремится к нулю при возрастании n. Кроме того, для всякого промежутка (a_n, b_n) теорема не выполняется, т. е. нельзя никакой (a_n, b_n) разбить на новые промежутки так, чтобы $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$, если только x_1 и x_2 принадлежат одному и тому же новому промежутку. Покажем, что это нелепо.

По теореме из [42] a_n и b_n имеют общий предел:

$$\lim a_n = \lim b_n = \alpha, \tag{30}$$

причем этот предел, как и все числа a_n и b_n, принадлежит промежутку (a, b). Положим сначала, что α — внутри (a, b). По условию, $f(x)$ непрерывна при $x = \alpha$, и, следовательно [34], при заданном в теореме ε существует такое η, что для всех x из промежутка $(\alpha - \eta,\ \alpha + \eta)$ выполняется неравенство

$$|f(\alpha) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{31}$$

Если x_1 и x_2 — два любых значения из промежутка $(\alpha - \eta,\ \alpha + \eta)$, то мы имеем:

$$f(x_2) - f(x_1) = f(x_2) - f(\alpha) + f(\alpha) - f(x_1),$$

откуда

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant |f(x_2) - f(\alpha)| + |f(\alpha) - f(x_1)|,$$

и, в силу (31):

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

т. е.

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon \tag{32}$$

для любых x_1 и x_2 из промежутка $(\alpha - \eta,\ \alpha + \eta)$. Но, в силу (30), будет существовать промежуток (a_l, b_l), принадлежащий промежутку $(\alpha - \eta,\ \alpha + \eta)$. Поэтому неравенство (32) и подавно будет выполняться для любых x_1 и x_2 из этого промежутка (a_l, b_l), т. е. для промежутка (a_l, b_l) теорема выполняется даже без всякого его подразделения на части. Это противоречит тому, что, как мы видели выше, для всякого промежутка (a_n, b_n) теорема не выполняется. Таким образом, теорема доказана, если α — внутри промежутка (a, b). Если α совпадает, например, с левым концом промежутка, т. е. $\alpha = a$, то доказательство будет таким же, но вместо промежутка $(\alpha - \eta,\ \alpha + \eta)$ надо будет взять промежуток $(\alpha,\ \alpha + \eta)$.

Перейдем теперь к доказательству третьего свойства из [35].

Теорема II. *Если $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b), то она равномерно непрерывна в этом промежутке*, т. е. *при любом заданном положительном ε существует такое положительное η, что $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ для любых значений. x' и x'' из (a, b), удовлетворяющих неравенству $|x'' - x'| < \eta$.*

В силу теоремы I мы можем подразделить (a, b) на конечное число новых промежутков так, чтобы $|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$, если только x_1 и x_2

принадлежат одному и тому же новому промежутку. Пусть η — длина самого короткого из новых промежутков. Покажем, что именно при этом числе η наша теорема выполняется. Действительно, если x' и x'' — два значения из (a, b), удовлетворяющих неравенству $|x''-x'|<\eta$, то или x' и x'' принадлежат одному и тому же новому промежутку, или они находятся в двух прилегающих друг к другу новых промежутках. В первом случае, по построению новых промежутков, имеем: $|f(x'')-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2}$, а потому и подавно $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$. Переходя ко второму случаю, обозначим через γ точку, в которой соприкасаются те два прилегающих друг к другу промежутка, к которым принадлежат x' и x''. В данном случае мы можем написать:

$$f(x'')-f(x')=f(x'')-f(\gamma)+f(\gamma)-f(x'),$$

т. е.

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant|f(x'')-f(\gamma)|+|f(\gamma)-f(x')|. \tag{33}$$

Но

$$|f(x'')-f(\gamma)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |f(\gamma)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{34}$$

так как точки x'' и γ, а также γ и x' находятся в одном и том же новом промежутке. Неравенства (33) и (34) дают нам $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$, и теорема доказана.

Теорема I приводит нас также к такому следствию:

Следствие. *Функция, непрерывная в промежутке (a, b), ограничена сверху и снизу*, т. е. *просто ограничена в этом промежутке.* Иными словами, существует такое число M, что для всех значений x из (a, b) выполняется неравенство $|f(x)|<M$. Действительно, возьмем некоторое определенное $\varepsilon_0>0$, и пусть n_0 — число тех новых промежутков, на которые надо разбить (a, b), чтобы удовлетворить теореме I при взятом значении $\varepsilon=\varepsilon_0$. Для любых двух точек, принадлежащих одному и тому же новому промежутку, мы имеем $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon_0$. Отсюда непосредственно следует, что для любого x из промежутка (a, b) мы имеем $|f(x)-f(a)|<n_0\varepsilon_0$, т. е. все значения $f(x)$ заключаются между $f(a)-n_0\varepsilon_0$ и $f(a)+n_0\varepsilon_0$.

Поскольку совокупность всех значений $f(x)$ в промежутке (a, b) ограничена сверху и снизу, она имеет точную верхнюю границу и точную нижнюю границу [42]. Обозначим первую через β, а вторую через α. Докажем теперь первое свойство из [35].

Теорема III. *Непрерывная в промежутке (a, b) функция достигает в этом промежутке своего наибольшего и наименьшего значения.*

Нам надо доказать, что в промежутке (a, b) существует такое значение x, при котором $f(x)$ равно β, и такое значение y, при котором $f(x)$ равно α. Ограничимся доказательством первого утверждения и будем доказывать от обратного. Положим, что $f(x)$ ни при каком x из (a, b) не равно β (следовательно, всегда меньше β). Составим новую функцию:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\beta-f(x)}.$$

Поскольку знаменатель не обращается в нуль, новая функция также будет непрерывной в промежутке (a, b) [34]. С другой стороны, из определения точной верхней границы следует, что при произвольном $\varepsilon>0$ существуют для $a\leqslant x\leqslant b$ значения $f(x)$, лежащие между $(\beta-\varepsilon)$ и β. При этом: $0<\beta-f(x)<\varepsilon$ и $\varphi(x)>\frac{1}{\varepsilon}$. Поскольку ε можно брать произвольно малым, мы видим, что непрерывная в промежутке (a, b) функция $\varphi(x)$ не ограничена сверху, что противоречит указанному выше следствию теоремы I.

Докажем, наконец, второе свойство из [35]. Пусть $f(x)$ непрерывна в (a, b) и k — некоторое число, лежащее между $f(a)$ и $f(b)$. Для определенности положим, что $f(a) < k < f(b)$. Составим новую функцию:

$$F(x) = f(x) - k,$$

непрерывную в промежутке (a, b). Ее значения на концах промежутка будут:

$$F(a) = f(a) - k < 0,$$
$$F(b) = f(b) - k > 0,$$

т. е. значения $F(x)$ на концах промежутка — разных знаков. Если мы докажем, что внутри (a, b) есть такое значение x_0, при котором $F(x_0) = 0$, то при этом $f(x_0) - k = 0$, т. е. $f(x_0) = k$, и второе свойство будет доказано. Итак, достаточно доказать следующую теорему:

Теорема IV. *Если $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b) а $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков, то внутри промежутка существует, по крайней мере одно, такое значение x_0, при котором $f(x_0) = 0$.*

Доказываем от обратного, как и теорему III. Пусть $f(x)$ нигде в промежутке (a, b) не обращается в нуль. При этом новая функция:

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} \tag{35}$$

будет также непрерывной в промежутке (a, b) [34]. Пусть задано какое-нибудь $\varepsilon > 0$. В силу теоремы I мы можем расставить внутри промежутка (a, b) конечное число точек так, что, причисляя к этим точкам еще концы промежутка, мы будем иметь разность значений $f(x)$ в любых двух соседних расставленных точках, по абсолютной величине меньшую, чем ε. Принимая во внимание, что $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков, мы можем утверждать, что найдутся такие две соседние из вышеупомянутых точек ξ_1 и ξ_2, в которых $f(x)$ разных знаков. Итак, с одной стороны, $f(\xi_1)$ и $f(\xi_2)$ разных знаков и, с другой стороны, $|f(\xi_2) - f(\xi_1)| < \varepsilon$. Но если у двух вещественных чисел разных знаков абсолютное значение разности меньше ε, то каждое из этих чисел по абсолютному значению меньше ε, т. е. например, $|f(\xi_1)| < \varepsilon$. Но тогда, в силу (35), $|\varphi(\xi_1)| > \frac{1}{\varepsilon}$, и ввиду того, что ε можно брать произвольно малым, мы видим, что непрерывная в промежутке (a, b) функция $\varphi(x)$ — не ограничена в этом промежутке, что нелепо. Теорема, таким образом, доказана.

44. Непрерывность элементарных функций. Мы показали раньше непрерывность полинома и рациональной функции [34]. Рассмотрим теперь показательную функцию

$$y = a^x \quad (a > 0), \tag{36}$$

причем для определенности будем считать $a > 1$. Эта функция вполне определена при всех рациональных положительных значениях x. Для отрицательных x она определяется формулой:

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}, \tag{37}$$

и, кроме того, $a^0 = 1$. Таким образом, она определена при всех рациональных x. Из алгебры известны также правила сложения и вычитания показателей при умножении и делении.

Если x есть положительное рациональное число $\frac{p}{q}$, то

$$a^x = \sqrt[q]{a^p},$$

где радикал считается арифметическим. Очевидно, что $a^p > 1$, и из определения корня вытекает, что $a^x > 1$ при $x > 0$ (применить определения из [41]). Из (37) вытекает, что $0 < a^x < 1$ при $x < 0$. Покажем теперь, что $a^{x_2} > a^{x_1}$, если $x_2 > x_1$, т. е. что a^x — возраствющая функция. Действительно,

$$a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^{x_2 - x_1} - 1),$$

причем $x_2 - x_1 > 0$, и, следовательно, оба сомножителя справа положительны. Покажем еще, что $a^x \to 1$, если $x \to 0$, принимая рациональные значения. Положим сначала, что $x \to 0$ через все рациональные значения, убывая (справа). При этом a^x убывает, но остается больше единицы, и, следовательно, имеет предел, который мы обозначим через l. Затем далее, что при упомянутом выше изменении x переменная $2x$ также стремится справа к нулю по всем рациональным значениям. Мы имеем, очевидно:

$$a^{2x} = (a^x)^2,$$

и, переходя к пределу, получим:

$$l = l^2 \quad \text{или} \quad l(l-1) = 0,$$

т. е. $l = 1$ или $l = 0$. Но вторая возможность отпадает ввиду $a^x > 1$. Итак, $a^x \to 1$, если $x \to 0$ справа. Из (37) вытекает, что тот же предел будет и тогда, когда $x \to 0$ слева. Итак, вообще: $a^x \to 1$, если $x \to 0$, принимая рациональные значения. Отсюда вытекает непосредственно, что если x, принимая рациональные значения, стремится к рациональному пределу b, то $a^x \to a^b$. Действительно,

$$a^x - a^b = a^b(a^{x-b} - 1).$$

Разность $(x - b)$ стремится к нулю и $(a^{x-b} - 1)$, по доказанному, также стремится к нулю.

Определим теперь функцию (36) при иррациональных x. Пусть α — некоторое иррациональное число, а I (α) и II (α) — первый и второй классы сечения в области рациональных чисел, определяющих α. Положим, что $x \to \alpha$, возрастая и проходя через все рациональные числа из I (α). Переменная a^x возрастает, но остается ограниченной, а именно она меньше, чем $a^{x''}$, где x'' — любое число из II (α). Таким образом, при упомянутом изменении x переменная a^x имеет предел, который мы пока обозначим через L. Точно так же, если $x \to \alpha$, убывая и пробегая рациональные числа из II (α), то a^x также имеет предел. Покажем, что этот предел твкже равен L. Пусть x' — из I (α) и x'' — из II (α). Мы имеем

$$a^{x''} - a^{x'} = a^{x'}(a^{x'' - x'} - 1) < L(a^{x'' - x'} - 1),$$

т. е.

$$0 < a^{x''} - a^{x'} < L(a^{x'' - x'} - 1).$$

Для x' и x'', близких к α, разность $(x'' - x')$ сколько угодно близка к нулю и, в силу написанного неравенства, то же можно сказать и о разности $(a^{x''} - a^{x'})$, откуда и вытекает наше утверждение о совпадении пределов. Мы принимаем по определению a^α равным упомянутому пределу L, т. е. *a^α есть предел, к которому стремится a^x, когда $x \to \alpha$ через рациональные значения.* Теперь функция (36) определена при всех вещественных x. На основании сказанного выше легко доквзать, что это будет возрастающая функция, т. е. $a^{x_2} > a^{x_1}$, если x_1 и x_2 — любые *вещественные* числа, удовлетворяющие неравенству $x_2 > x_1$. При доказательстве надо рвссмотреть отдельно случаи, когда x_1 и x_2 — оба иррациональны или одно из них рационально. Остается еще доказать, что эта функция будет непрерывна при всяком вещественном x. Сначала надо показать, что $a^x \to 1$ при $x \to 0$, причем считаются допустимыми все вещественные значения x. Это можно показать

совершенно так же, как выше это было сделано для рациональных x. Далее, как и выше, пользуясь формулой:

$$a^x - a^\alpha = a^\alpha (a^{x-\alpha} - 1),$$

мы можем показать, что $a^x \to a^\alpha$ при $x \to \alpha$, что и дает непрерывность a^x при любом вещественном x.

Нетрудно проверить, что все основные свойства показательной функции справедливы при любых вещественных показателях. Пусть, например, α и β — два иррациональных числа и пусть $x \to \alpha$ и $y \to \beta$, причем переменные x и y, меняясь, одновременно принимают рациональные значения. Для рациональных показателей мы имеем:

$$a^x a^y = a^{x+y}.$$

Переходя к пределу и пользуясь доказанной непрерывностью показательной функции, получим то же свойство для иррациональных показателей:

$$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}.$$

Докажем еще правило перемножения показателей при возвышении степени в степень:

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}.$$

Если $\beta = n$ есть целое положительное, то написанная формула непосредственно вытекает из правила сложения показателей при умножении. Если $\beta = \frac{p}{q}$ есть рациональное положительное число, то

$$(a^\alpha)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^\alpha)^p} = \sqrt[q]{a^{\alpha p}} = a^{\alpha\frac{p}{q}}.$$

Для рациональных отрицательных чисел указанное правило непосредственно вытекает из формулы (37). Положим теперь, что β иррационально, и пусть рациональные числа r стремятся к β. Мы имеем по доказанному выше:

$$(a^\alpha)^r = a^{\alpha r}.$$

Переходя к пределу и пользуясь непрерывностью показательной функции, причем слева принимаем a^α за основание, мы и получим $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

Прежде чем переходить к логарифмической функции, сделаем некоторые замечания об обратных функциях, о чем мы уже говорили коротко во введении [20]. Если $y = f(x)$ — возрастающая непрерывная функция в промежутке (a, b), причем $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то, в силу второго свойства непрерывных функций, при возрастании x от a до b через все вещественные значения $f(x)$ будет возрастать от A до B, проходя через все промежуточные значения. Таким образом, всякому значению y из промежутка (A, B) будет соответствовать определенное x из (a, b), и обратная функция $x = \varphi(y)$ будет однозначной и возрастающей. Если $x = x_0$ находится внутри (a, b), $y_0 = f(x_0)$ и x пробегает малый промежуток $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, то y будет пробегать некоторый промежуток $(y_0 - \eta_1, y_0 + \eta_2)$. Обозначая через δ наименьшее из двух положительных чисел η_1 и η_2, мы можем утверждать, что если y принадлежит промежутку $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, составляющему лишь часть промежутка $(y_0 - \eta_1, y_0 + \eta_2)$, то соответствующие значения x тем более принадлежат прежнему промежутку $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, т. е. $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$, если только $|y - y_0| < \delta$. Ввиду произвольности ε это дает нам непрерывность функции $x = \varphi(y)$ в точке $y = y_0$. Если x_0 совпадает, например, с концом a, то в предыдущих рассуждениях вместо $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ надо взять промежуток

$(x_0, x_0+\varepsilon)$. Аналогично можно разобрать случай убывающей непрерывной функции $f(x)$.

Вернемся к функции (36). Раз $a > 1$, то $a = 1 + b$, где $b > 0$, и формула бинома Ньютона дает при целом положительном $n > 1$:

$$a^n = (1+b)^n > 1 + nb,$$

откуда видно, что a^x беспредельно возрастает при беспредельном возрастании x. Далее, из (37) следует, что $a^x \to 0$ при $x \to -\infty$. Принимая во внимание сказанное выше об обратных функциях, можем утверждать, что функция

$$x = \log_a y, \tag{38}$$

обратная (36), будет однозначной, возрастающей непрерывной функцией при $y > 0$. Такие же результаты получаются и для случая $0 < a < 1$, но только функции (36) и (38) будут убывающими.

Введем теперь новое понятие о *сложной функции*. Пусть $y = f(x)$ есть функция, непрерывная в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, причем ее значения принадлежат промежутку (c, d). Пусть, далее, $z = F(y)$ есть функция, непрерывная в промежутке $c \leqslant y \leqslant d$. Понимая под y указанную выше функцию от x, мы получим сложную функцию от x:

$$z = F(y) = F(f(x)).$$

Говорят, что эта функция зависит от x через посредство y. Она определена в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$. Нетрудно видеть, что она будет и непрерывной в этом промежутке. Действительно, бесконечно малому приращению x соответствует бесконечно малое приращение y в силу непрерывности $f(x)$, а бесконечно малому приращению y соответствует бесконечно малое приращение z в силу непрерывности $F(y)$.

Рассмотрим теперь степенную функцию

$$z = x^b \tag{39}$$

с любым вещественным показателем b, причем переменную x мы считаем положительной. Из рассуждений с показательной функцией непосредственно следует, что функция (39) имеет определенное значение при всяком $x > 0$. Пользуясь определением логарифма и применяя, например, натуральные логарифмы, мы можем написать вместо (39):

$$z = e^{b \log x}.$$

Полагая $y = b \log x$ и $z = e^y$, мы можем рассматривать эту функцию как сложную функцию от x, и непрерывность показательной и логарифмической функций докажет нам непрерывность функции (39) при всяком $x > 0$.

Нетрудно, пользуясь формулами элементарной тригонометрии, доказать непрерывность тригонометрических функций. Действительно, известная формула тригонометрии:

$$\sin(x+h) - \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

показывает нам, что

$$|\sin(x+h) - \sin x| \leqslant 2\left|\sin \frac{h}{2}\right|,$$

ибо $\left|\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\right| \leqslant 1$. Но для любого угла α: $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$, так что

$$|\sin(x+h) - \sin x| \leqslant |h|$$

и, следовательно, при стремлении h к нулю и разность $|\sin(x+h) - \sin x|$ стремится к нулю, что дает непрерывность функции $\sin x$ при всех значениях x.

Так же доказывается непрерывность функции $\cos x$ при всех x. Из формул:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

непосредственно следует [34] непрерывность $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ при всех x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в нуль.

Функция $y = \sin x$ есть непрерывная возрастающая функция в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Пользуясь сказанным выше об обратных функциях, можем утверждать, что главное значение функции $x = \arcsin y$ [24] будет непрерывной возрастающей функцией в промежутке $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Аналогично доказывается непрерывность и остальных обратных круговых функций.

ГЛАВА II

ПОНЯТИЕ О ПРОИЗВОДНОЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 3. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

45. Понятие о производной. Рассмотрим движущуюся по направленной прямой линии точку. Пройденный ею путь s, отсчитываемый от определенной точки прямой, есть, очевидно, функция времени t:

$$s = f(t),$$

так что всякому определенному моменту времени t соответствует определенное значение s. Придадим t приращение Δt, и тогда новому моменту времени $t + \Delta t$ будет соответствовать путь $s + \Delta s$. В случае равномерного движения, приращение пути пропорционально приращению времени, и в этом случае отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ выражает постоянную скорость движения. В общем случае это отношение зависит как от выбранного момента времени t, так и от приращения Δt и выражает *среднюю скорость* движения за промежуток времени от t до $t + \Delta t$. Эта средняя скорость есть скорость воображаемой точки, которая, двигаясь равномерно, за промежуток времени Δt проходит путь Δs. Например, в случае равномерно ускоренного движения мы будем иметь:

$$s = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t$$

и

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 + v_0 (t + \Delta t) - \frac{1}{2} gt^2 - v_0 t}{\Delta t} = gt + v_0 + \frac{1}{2} g\Delta t.$$

Чем меньше промежуток времени Δt, тем с большим правом мы можем считать движение рассматриваемой точки за этот промежуток времени равномерным, и предел отношения $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, при стремлении Δt к нулю, определяет *скорость v в данный момент* t:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Так, в случае равномерно ускоренного движения:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+v_0+\frac{1}{2}g\Delta t\right)=gt+v_0.$$

Скорость v есть так же, как и путь s, функция от t; функция эта называется *производной* функции $f(t)$ по t; таким образом, *скорость есть производная от пути по времени.*

Положим, что некоторое вещество вступает в химическую реакцию. Количество этого вещества x, вступившее уже в реакцию к моменту времени t, есть функция от t. Приращению времени Δt будет соответствовать приращение Δx величины x, и отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ выражает *среднюю скорость химической реакции* за промежуток времени Δt, а предел этого отношения, при стремлении Δt к нулю, выражает *скорость химической реакции в данный момент времени* t.

Рассмотренные примеры приводят нас к следующему понятию о производной функции:

Производной данной функции $y=f(x)$ при заданном значении x называется предел отношения приращения Δy функции к соответствующему приращению Δx независимой переменной, когда это последнее стремится к нулю.

Для обозначения производной пользуются символами y' или $f'(x)$:

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Операция нахождения производной называется *дифференцированием.* Упомянутый выше предел может и не существовать, и тогда не существует и производной. При определении производной $f'(x)$ мы должны считать, что функция $f(x)$ задана при рассматриваемом значении x и всех значениях, к нему достаточно близких. При этом дробь $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ определена при всех Δx, достаточно малых по абсолютной величине, кроме значения $\Delta x=0$, т. е. величина Δx определена в некотором промежутке $-k\leqslant\Delta x\leqslant+k$ и последовательность значений Δx надо установить так, как это было указано в [**25**] (при $a=0$), и обозначение $\Delta x\to 0$ соответствует сказанному в [**26**]. Таким образом, указанная выше дробь является упорядоченной переменной. Существование для нее предела $f'(x)$ при заданном x равносильно следующему: при любом заданном $\varepsilon>0$ существует такое число $\eta>0$, что

$$\left|f'(x)-\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right|<\varepsilon \text{ при } |\Delta x|<\eta \text{ и } \Delta x\neq 0.$$

Предполагая, что производная существует, можем написать:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)+\alpha,$$

где $\alpha\to 0$, когда $\Delta x\to 0$ [**27**].

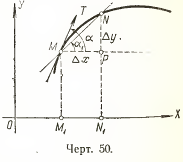
Далее, напишем:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=[f'(x)+\alpha]\,\Delta x,$$

и отсюда непосредственно видно, что $[f(x+\Delta x)-f(x)]\to 0$, если $\Delta x\to 0$, т. е. *если при некотором значении x производная существует, то при этом значении x функция непрерывна.* Обратное утверждение неправильно, т. е. по непрерывности функции нельзя еще судить о существовании производной. Обратим внимание на то, что при отыскании производной мы имеем дробь $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, у которой и числитель и знаменатель стремятся к нулю, причем мы считаем, что Δx никогда не обращается в нуль.

46. Геометрическое значение производной. Для выяснения геометрического значения производной обратимся к графику функции $y=f(x)$. Возьмем на нем точку M с координатами (x, y) и близкую к ней, тоже лежащую на кривой, точку N с координатами $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$. Проведем ординаты $\overline{M_1M}$ и $\overline{N_1N}$ этих точек и из точки M проведем прямую, параллельную оси OX. Мы будем, очевидно, иметь (черт. 50):

$$\overline{MP}=\overline{M_1N_1}=\Delta x,\quad \overline{M_1M}=y,$$
$$\overline{N_1N}=y+\Delta y,\quad \overline{PN}=\Delta y. \qquad (1)$$



Черт. 50.

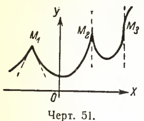
Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ равно, очевидно, тангенсу угла α_1, образованного секущей MN с положительным направлением оси OX. При стремлении Δx к нулю точка N будет, оставаясь на кривой, стремиться к точке M; предельным положением секущей MN будет *касательная MT* к кривой в точке M, и, следовательно, производная $f'(x)$ *равна тангенсу угла α, образованного касательной к кривой в точке $M(x, y)$ с положительным направлением оси OX,* т. е. *равна угловому коэффициенту этой касательной.*

При вычислении отрезков по формуле (1) надо принимать во внимание правило знаков и помнить, что приращения Δx и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными.

Мы видим, таким образом, что существование производной $f'(x)$ связано с существованием касательной к кривой, соответствующей уравнению $y=f(x)$. Непрерывная кривая может в отдельных точках вовсе не иметь касательной или иметь касательную, параллельную оси OY, с бесконечно большим угловым коэффициентом (черт. 51), и при соответствующих значениях x функция $f(x)$ не будет иметь производной.

Таких исключительных точек может быть сколь угодно много на кривой и даже, как доказывается, можно построить такую непрерывную функцию, которая не будет иметь производной ни при одном значении x. Кривая, соответствующая такой функции, недоступна нашим геометрическим представлениям.

Обозначая для простоты письма приращение независимой переменной буквой h, напишем отношение:



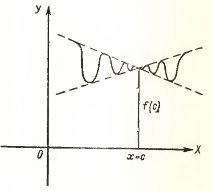
Черт. 51.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \qquad (2)$$

Если x — фиксированное число, находящееся внутри промежутка, в котором определена $f(x)$, то отношение (2) есть функция от h, определенная при всех h, достаточно близких к нулю, кроме $h=0$. Предел этого отношения при $h \to 0$ должен определяться согласно сказанному в [45]. Если он существует, то он и дает производную $f'(x)$. Существование этого предела, как мы видели, равносильно следующему [32]: при любом заданном положительном ε существует такое положительное число η, что

$$\left|f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|<\varepsilon \quad \text{при} \quad |h|<\eta \ \text{ и } \ h \neq 0.$$

Положим, что h стремится к нулю не произвольным образом, а со стороны положительных значений или со стороны отрицательных значений, т. е. $h \to +0$ или $h \to -0$ [26]. Если при этом отношение (2) имеет предел, то он обозначается обычно символом $f'(x+0)$ или $f'(x-0)$ и называется соответственно *производной справа* и *производной слева*. Если эти производные различны, то они дают угловые коэффициенты касательных к кривой в ее точке излома (если такие касательные существуют). На черт. 51 изображены такие касательные в точке M_1.



Черт. 52.

Существование производной равносильно тому, что существуют производные $f'(x+0)$ и $f'(x-0)$ и что они равны между собой, причем в этом случае $f'(x)=f'(x+0)=f'(x-0)$. Возможны, конечно, и такие точки непрерывности функции, в которых нет и производных $f'(x+0)$ и $f'(x-0)$. Такая кривая изображена на черт. 52. Она не имеет указанных производных при $x=c$.

Если непрерывная функция задана только на промежутке (a, b), то при $x=a$ мы имеем возможность образовать только правую производную $f'(a+0)$, а при $x=b$ — только левую производную $f'(b-0)$. Когда говорят, что $f(x)$ *имеет в промежутке* (a, b) *(замкнутом) производную* $f'(x)$, то во внутренних точках промежутка эту производную надо понимать в обычном смысле, а на концах промежутка в только что указанном смысле.

Если $f(x)$ определена в промежутке (A, B), более широком, чем (a, b), т. е. $A<a$ и $B>b$, и имеет внутри (A, B) обычную производную $f'(x)$, то тем более она будет производной в указанном смысле и на промежутке (a, b).

47. Производные простейших функций. Из понятия производной следует, что *для определения производной надо составить приращение функции, разделить его на соответствующее приращение независимой переменной и найти предел этого отношения при стремлении приращения независимой переменной к нулю.* Применим это правило к некоторым простейшим функциям.

I. $y=b$ (постоянная) [12].

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{b-b}{h}=\lim_{h\to 0}0=0,$$

т. е. *производная постоянной равна нулю.*

II. $y=x^n$ (n — целое положительное число).

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+nhx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}h^2x^{n-2}+\ldots+h^n-x^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}hx^{n-2}+\ldots+h^{n-1}\right]=nx^{n-1}.$$

В частности, если $y=x$, то $y'=1$. В дальнейшем мы обобщим это правило дифференцирования степенной функции на любые значения показателя n.

III. $y=\sin x$.

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x,$$

так как при стремлении $\frac{h}{2}$ к нулю $\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\to 1$ [33].

IV. $y = \cos x$.

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} =$$

$$= -\lim_{h \to 0} \sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x.$$

V. $y = \log x \ (x > 0)$.

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x},$$

так как при $h \to 0$ переменная $\alpha = \frac{h}{x}$ также стремится к нулю и $\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} \to 1$ [38].

VI. $y = cu(x)$, где c — постоянная и $u(x)$ есть функция от x.

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{cu(x+h) - cu(x)}{h} = c \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = cu'(x),$$

т. е. *производная от произведения постоянной величины на переменную равна произведению этой постоянной на производную от переменного сомножителя*, или, другими словами, *постоянный множитель можно выносить за знак производной*.

VII. $y = \log_a x$.

Как мы знаем, $\log_a x = \log x \cdot \frac{1}{\log a}$ [38]. Применяя правило VI, получим:

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log a}.$$

VIII. Рассмотрим производную от суммы нескольких функций; для определенности ограничимся тремя слагаемыми:

$$y = u(x) + v(x) + w(x),$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h) + w(x+h)] - [u(x) + v(x) + w(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \frac{w(x+h) - w(x)}{h}\right] =$$

$$= u'(x) + v'(x) + w'(x),$$

т. е. *производная суммы нескольких функций равна сумме производных этих функций.*

IX. Рассмотрим теперь производную от произведения двух функций:

$$y = u(x) \cdot v(x),$$
$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)\, v(x+h) - u(x)\, v(x)}{h}.$$

Прибавляя к числителю величину $u(x+h)\,v(x)$ и вычитая из него ту же величину, получим:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)\, v(x+h) - u(x+h)\, v(x) + u(x+h)\, v(x) - u(x)\, v(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} u(x+h) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \lim_{h \to 0} v(x) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} =$$
$$= u(x)\, v'(x) + v(x)\, u'(x),$$

т. е. для случая двух сомножителей мы показали, что *производная произведения равна сумме произведений производных каждого из сомножителей на остальные.*

Докажем справедливость этого правила для трех сомножителей, соединяя два сомножителя в одну группу и применяя правило к случаю двух сомножителей:

$$y = u(x)\, v(x)\, w(x),$$
$$y' = \{[u(x) v(x)]\, w(x)\}' = [u(x) v(x)]\, w'(x) + w(x)\, [u(x)\, v(x)]' =$$
$$= u(x)\, v(x)\, w'(x) + u(x)\, v'(x)\, w(x) + u'(x)\, v(x)\, w(x).$$

Применяя известный метод математической индукции, нетрудно распространить это правило на случай любого конечного числа сомножителей.

X. Пусть теперь y есть частное:

$$y = \frac{u(x)}{v(x)},$$
$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{v(x)\, v(x+h)} \cdot \frac{u(x+h)\, v(x) - v(x+h)\, u(x)}{h}.$$

Вычитая и прибавляя к числителю второй из дробей произведение $u(x)\, v(x)$, получим, принимая во внимание непрерывность $v(x)$:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{1}{v(x)\, v(x+h)} \cdot \frac{u(x+h) v(x) - u(x) v(x) + u(x) v(x) - v(x+h) u(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{v(x)\, v(x+h)} \left[v(x) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] =$$
$$= \frac{u'(x)\, v(x) - v'(x)\, u(x)}{[v(x)]^2},$$

т. е. *производная дроби* (частного) *равна производной числителя, умноженной на знаменатель, минус производная знаменателя, умноженная на числитель, все разделенное на квадрат знаменателя.*

XI. $y = \operatorname{tg} x$.

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

XII. $y = \operatorname{ctg} x$.

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

При выводе правил VI, VIII, IX и X мы предполагали, что функции $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ имеют производные, и доказали существование производной у функции y.

48. Производные сложных и обратных функций. Напомним понятие о *сложной функции* [44]. Пусть $y = f(x)$ — функция, непрерывная в некотором промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, причем ее значения принадлежат промежутку $c \leqslant y \leqslant d$. Пусть далее, $z = F(y)$ — функция, непрерывная в промежутке $c \leqslant y \leqslant d$. Понимая под y вышеуказанную функцию от x, мы получим сложную функцию от x:

$$z = F(y) = F(f(x)).$$

Говорят, что эта функция зависит от x через посредство y. Нетрудно видеть, что эта функция будет непрерывна в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$. Действительно, бесконечно малому приращению x соответствует бесконечно малое приращение y в силу непрерывности функции $f(x)$, а бесконечно малому приращению y соответствует бесконечно малое приращение z в силу непрерывности $F(y)$.

Прежде чем переходить к выводу правила дифференцирования сложной функции сделаем одно замечание. Если $z = F(y)$ имеет производную при $y = y_0$, то, согласно сказанному в [45], мы можем написать:

$$\Delta z = F(y_0 + \Delta y) - F(y_0) = [F'(y_0) + \alpha] \Delta y, \qquad (3)$$

где переменная α есть функция Δy, определенная при всех Δy, достаточно близких к нулю и отличных от нуля, причем $\alpha \to 0$, если $\Delta y \to 0$, оставаясь отличным от нуля. Равенство (3) остается справедливым для $\Delta y = 0$ при любом выборе α, ибо при $\Delta y = 0$ и $\Delta z = 0$. В силу сказанного выше естественно положить $\alpha = 0$ при $\Delta y = 0$. При таком соглашении мы можем считать, что в формуле (3) $\alpha \to 0$, если $\Delta y \to 0$ любым образом, даже и принимая значение,

равное нулю. Формулируем теперь теорему о производной сложной функции.

Теорема. *Если $y=f(x)$ имеет в точке $x=x_0$ производную $f'(x_0)$ и $z=F(y)$ имеет в точке $y_0=f(x_0)$ производную $F'(y_0)$, то сложная функция $F(f(x))$ имеет в точке $x=x_0$ производную, равную произведению $F'(y_0)\ f'(x_0)$.*

Пусть Δx — приращение (отличное от нуля), которое мы придаем значению x_0 независимой переменной x, и $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ — соответствующее приращение переменной y (оно может оказаться и равным нулю). Пусть, далее, $\Delta z=F(y_0+\Delta y)-F(y_0)$. Производная от сложной функции $z=F(f(x))$ по x при $x=x_0$ равна, очевидно, пределу отношения $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$, если этот предел существует. Разделим обе части (3) на Δx:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=[F'(y_0)+\alpha]\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

При стремлении Δx к нулю и $\Delta y\to 0$, в силу непрерывности функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$, а потому, как мы указали выше, $\alpha\to 0$. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится при этом к производной $f'(x_0)$, и, переходя в написанном выше равенстве к пределу, получим:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=F'(y_0)f'(x_0),$$

что и доказывает теорему. Отметим, что непрерывность $f(x)$ при $x=x_0$ вытекает из предположенного существования производной $f'(x_0)$ [45].

Доказанная теорема может быть формулирована в виде следующего правила дифференцирования сложных функций: *производная сложной функции равна произведению производной по промежуточной переменной на производную от промежуточной переменной по независимой переменной:*

$$z'_x=F'(y)\ f'(x).$$

Переходим к правилу дифференцирования обратных функций. Если $y=f(x)$ непрерывна и возрастает в промежутке (a, b) (т. е. бо̀льшим значениям x соответствуют и бо̀льшие y), причем $A=f(a)$ и $B=f(b)$, то, как мы знаем [21 и 44], в промежутке (A, B) существует однозначная и непрерывная обратная, также возрастающая функция $x=\varphi(y)$. В силу возрастания, если $\Delta x\neq 0$, то и $\Delta y\neq 0$, и наоборот, и в силу непрерывности из $\Delta x\to 0$ следует $\Delta y\to 0$, и наоборот. (Совершенно аналогично рассматривается случай убывающих функций).

Теорема. *Если $f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$, отличную от нуля, то обратная функция $\varphi(y)$ имеет в точке $y_0 = f(x_0)$ производную:*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{4}$$

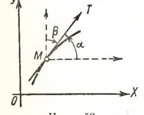
Обозначая через Δx и Δy соответствующие приращения x и y, т. е.

$$\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0);$$
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

и принимая во внимание, что оба они отличны от нуля, можем написать:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Как мы видели выше, Δx и Δy одновременно стремятся к нулю, и последнее равенство в пределе и приводит к (4). Доказанная теорема может быть формулирована в виде следующего правила дифференцирования обратных функций: *производная обратной функции равна единице, деленной на производную первоначальной функции в соответствующей точке.*



Черт. 53.

Правило дифференцирования обратных функций имеет простое геометрическое истолкование [21]. Функции $x = \varphi(y)$ и $y = f(x)$ имеют один и тот же график на плоскости XOY с той лишь разницей, что для функции $x = \varphi(y)$ ось независимой переменной есть ось OY, а не OX (черт. 53). Проводя касательную MT и вспоминая геометрическое значение производной, получим:

$$f'(x) = \operatorname{tg}(OX, MT) = \operatorname{tg}\alpha,$$
$$\varphi'(y) = \operatorname{tg}(OY, MT) = \operatorname{tg}\beta,$$

причем на черт. 53 угол β, как и α, считается положительным.

Но, очевидно, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и, следовательно:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad \text{т. е.} \quad \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Если $x = \varphi(y)$ есть функция, обратная $y = f(x)$, то, очевидно, и наоборот — функцию $y = f(x)$ можно считать обратной функции $x = \varphi(y)$.

Применим правило дифференцирования обратных функций к показательной функции.

XIII. $y = a^x$ $(a > 0)$.

Обратная функция в данном случае будет:

$$x = \varphi(y) = \log_a y,$$

и в силу VII:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\log a},$$

откуда по правилу дифференцирования обратных функций:

$$y' = \frac{1}{\varphi'(y)} = y \log a \quad \text{или} \quad (a^x)' = a^x \log a.$$

В частном случае при $a = e$ имеем:

$$(e^x)' = e^x.$$

Полученная формула, вместе с правилом дифференцирования сложных функций, даст нам возможность вычислить производную от степенной функции.

XIV. $y = x^n$ $(x > 0$; n — любое вещественное число).

Эта функция при всех $x > 0$ определена и имеет положительные значения [19].

Пользуясь определением логарифма, мы можем представить нашу функцию в виде сложной функции

$$y = x^n = e^{n \log x}.$$

Дифференцируя по правилу дифференцирования сложных функций получим:

$$y' = e^{n \log x} \cdot \frac{n}{x} = x^n \cdot \frac{n}{x} = nx^{n-1}.$$

Этот результат нетрудно обобщить и на случай отрицательных значений x, если только сама функция при этом существует, например, $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$.

Применим правило дифференцирования обратных функций к нахождению производных обратных круговых функций.

XV. $y = \arcsin x$.

Мы рассматриваем главное значение [24] этой функции, т. е. ту дугу, которая находится в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. Функцию эту можно рассматривать как обратную функцию по отношению к функции $x = \sin y$ и, согласно правилу дифференцирования обратных функций, имеем:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

причем у радикала надо брать знак (+), так как $\cos y$ имеет знак (+) в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Точно так же можно получить:

$$(\operatorname{arc}\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

причем рассматривается главное значение $\operatorname{arc}\cos x$, т. е. та дуга, которая заключается в промежутке $(0, \pi)$.

XVI. $y = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x$.

Главное значение $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$ заключается в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, и функцию эту можно рассматривать как обратную по отношению к функции $x = \operatorname{tg} y$; следовательно:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Точно так же получим:

$$(\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

XVII. Рассмотрим еще дифференцирование функций вида:

$$y = u^v,$$

где u и v — функции от x (степенно-показательная функция).

Мы можем написать

$$y = e^{v \log u},$$

и, применяя правило дифференцирования сложных функций, получим:

$$y' = e^{v \log u} \cdot (v \log u)'.$$

Применяя правило дифференцирования произведения и дифференцируя $\log u$, как сложную функцию от x, будем иметь окончательно:

$$y' = e^{v \log u}\left(v' \log u + \frac{v}{u} u'\right)$$

или

$$y' = u^v\left(v' \log u + \frac{v}{u} u'\right).$$

49. Таблица производных и примеры. Приведем таблицу всех выведенных нами правил дифференцирования.

1. $(c)' = 0$.
2. $(cu)' = cu'$.
3. $(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n$.
4. $(u_1 u_2 \ldots u_n)' = u'_1 u_2 u_3 \ldots u_n + u_1 u'_2 u_3 \ldots u_n + \ldots + u_1 u_2 u_3 \ldots u'_n$.

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

6. $(x^n)' = nx^{n-1}$ и $(x)' = 1$.

7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log a}$ и $(\log x)' = \frac{1}{x}$.

8. $(e^x)' = e^x$ и $(a^x)' = a^x \log a$.

9. $(\sin x)' = \cos x$.

10. $(\cos x)' = -\sin x$.

11. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

12. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

15. $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

16. $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

17. $(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v \log u\, v'$.

18. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ (y зависит от x через посредство u).

19. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Применим выведенные правила к нескольким примерам.

1. $y = x^3 - 3x^2 + 7x - 10$.

Применяя правила 3, 6 и 2, получим:

$$y' = 3x^2 - 6x + 7.$$

2. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-\frac{2}{3}}$.

Применяя правило 6, получим:

$$y' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}.$$

3. $y = \sin^2 x$.

Полагая $u = \sin x$, применим правила 18, 6 и 9:

$$y' = 2u \cdot u' = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

4. $y = \sin(x^2)$.

Полагая $u = x^2$, применим те же правила:

$$y' = \cos u \cdot u' = 2x\cos(x^2).$$

5. $y=\log(x+\sqrt{1+x^2})$.

Полагая сначала $u=x+\sqrt{x^2+1}$ и затем $v=x^2+1$, применим два раза правило 18, а также правила 7, 3 и 6:

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(x+\sqrt{1+x^2})'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left[1+(\sqrt{1+x^2})'\right]=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)'\right]=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

6. $y=\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

Положим $u=\frac{x}{2x+1}$ и применим правила 18, 6 и 5:

$$y'=n\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{n-1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)'=n\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{n-1}\frac{2x+1-2x}{(2x+1)^2}=\frac{nx^{n-1}}{(2x+1)^{n+1}}.$$

7. $y=x^x$.

Применяя правило 17, получим:

$$y'=x^{x-1}\cdot x+x^x\log x=x^x(1+\log x).$$

8. Функция y задана уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \qquad (5)$$

как неявная функция от x. Требуется найти производную y.

Если бы мы решили данное уравнение относительно y, то получили бы $y=f(x)$, левая часть уравнения после подстановки $y=f(x)$, очевидно, обращается тождественно в нуль. Но производная от нуля как производная от постоянной, равна нулю, а потому, если мы продифференцируем левую часть данного уравнения по x, считая, что y есть заданная этим уравнением функция от x, то должны получить нуль:

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}y'=0, \qquad \text{откуда} \qquad y'=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

В этом случае, как мы видим, y' выражается не только через x, но и через y, но зато нам не пришлось для отыскания производной решать уравнение (5) относительно y, т. е. находить явное выражение функции.

Как известно из аналитической геометрии, уравнению (5) соответствует эллипс, и найденное выражение y' дает угловой коэффициент касательной к этому эллипсу в точке с координатами (x, y).

50. Понятие о дифференциале. Пусть Δx — произвольное приращение независимой переменной, которое мы считаем уже не зависящим от x. Мы будем называть его *дифференциалом независимой переменной* и обозначать знаком Δx либо dx. Знак этот ни в коем случае не является произведением d на x, а служит лишь символом

для обозначения *произвольной, не зависящей* от x, величины, которую мы считаем приращением независимой переменной.

Дифференциалом функции называется произведение ее производной на дифференциал независимой переменной.

Дифференциал функции обозначают символом dy или $df(x)$:

$$dy \text{ или } df(x) = f'(x)\,dx. \tag{6}$$

Из этой формулы получается выражение производной в виде частного дифференциалов:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}.$$

Дифференциал функции не совпадает с ее приращением. Чтобы выяснить разницу между этими понятиями, обратимся к графику функции. Возьмем на нем некоторую точку $M(x, y)$ и другую точку N. Проведем касательную MT, ординаты, соответствующие точкам M и N, и прямую MP параллельно OX (черт. 54). Мы будем иметь:

$$\overline{MP} = \overline{M_1N_1} = \Delta x \text{ (или } dx),$$
$$\overline{PN} = \Delta y \text{ (приращение } y),$$
$$\operatorname{tg} \angle PMQ = f'(x),$$

отсюда

$$dy = f'(x)\,dx = \overline{MP} \operatorname{tg} \angle PMQ = \overline{PQ}.$$

Черт. 54.

Дифференциал функции изображается отрезком $\overline{PQ}$, не совпадающим с отрезком $\overline{PN}$, который изображает приращение функции. Отрезок $\overline{PQ}$ изображает то приращение, которое получилось бы, если бы в промежутке $(x, x + dx)$ мы заменили отрезок $\overline{MN}$ кривой отрезком $\overline{MQ}$ касательной, т. е. если бы мы считали, что в этом промежутке приращение функции пропорционально приращению независимой переменной, и коэффициент пропорциональности взяли бы равным угловому коэффициенту касательной MT, или, что то же, равным производной $f'(x)$.

Разность между дифференциалом и приращением изображается отрезком $\overline{NQ}$. Покажем, что если Δx стремится к нулю, то разность эта есть величина бесконечно малая высшего порядка по сравнению с Δx [**36**].

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в пределе дает производную, а потому [**27**]:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$$

где ε есть величина бесконечно малая одновременно с Δx. Из этого равенства получим:

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon\Delta x$$

или

$$\Delta y = dy + \varepsilon\Delta x,$$

откуда видно, что разность между dy и Δy равна $(-\varepsilon\,\Delta x)$. Но отношение $(-\varepsilon\,\Delta x)$ к Δx, равное $(-\varepsilon)$, стремится к нулю вместе с Δx, т. е. разность между dy и Δy есть величина бесконечно малая высшего порядка по сравнению с Δx. Заметим, что знак этой разности может быть любым. На нашем чертеже и Δx и эта разность имеют знак $(+)$.

Формула (6) дает правило нахождения дифференциала функции. Применим его к некоторым частным случаям.

I. Если c есть постоянная, то

$$dc = (c)'\,dx = 0 \cdot dx = 0,$$

т. е. *дифференциал постоянной равен нулю.*

II. $$d\,[cu(x)] = [cu(x)]'\,dx = cu'(x)\,dx = c\,du(x),$$

т. е. *постоянный множитель можно выносить за знак дифференциала.*

III. $$d\,[u(x) + v(x) + w(x)] = [u(x) + v(x) + w(x)]'\,dx = \\ = [u'(x) + v'(x) + w'(x)]\,dx = u'(x)\,dx + v'(x)\,dx + w'(x)\,dx = \\ = du(x) + dv(x) + dw(x),$$

т. е. *дифференциал суммы равен сумме дифференциалов слагаемых.*

IV. $$d\,[u(x)\,v(x)\,w(x)] = [u(x)\,v(x)\,w(x)]'\,dx = \\ = v(x)\,w(x)\,u'(x)\,dx + u(x)\,w(x)\,v'(x)\,dx + u(x)\,v(x)\,w'(x)\,dx = \\ = v(x)\,w(x)\,du(x) + u(x)\,w(x)\,dv(x) + u(x)\,v(x)\,dw(x),$$

т. е. *дифференциал произведения равен сумме произведений дифференциалов каждого из сомножителей на все остальные сомножители.*

Мы ограничились случаем трех сомножителей. Тот же вывод годится и для любого конечного числа сомножителей.

V. $$d\,\frac{u(x)}{v(x)} = \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' dx = \frac{v(x)\,u'(x)\,dx - u(x)\,v'(x)\,dx}{[v(x)]^2} = \\ = \frac{v(x)\,du(x) - u(x)\,dv(x)}{[v(x)]^2},$$

т. е. *дифференциал частного* (дроби) *равен произведению дифференциала числителя на знаменатель минус произведение дифференциала знаменателя на числитель, все деленное на квадрат знаменателя.*

VI. Рассмотрим сложную функцию $y=f(u)$, где u есть функция от x. Определим dy, предполагая y зависящим от x:

$$dy=y'_x\,dx=f'(u)\cdot u'_x\,dx=f'(u)\,du,$$

т. е. *дифференциал сложной функции имеет тот же вид, какой он имел бы в том случае, если бы вспомогательная функция u была независимой переменной.*

Рассмотрим численный пример для сравнения величины приращения функции с ее дифференциалом. Возьмем функцию

$$y=f(x)=x^3+2x^2+4x+10$$

и рассмотрим ее приращение:

$$f(2{,}01)-f(2)=2{,}01^3+2\cdot 2{,}01^2+4\cdot 2{,}01+10-(2^3+2\cdot 2^2+4\cdot 2+10).$$

Производя все действия, получим для приращения величину:

$$\Delta y=f(2{,}01)-f(2)=0{,}240801.$$

Несравненно проще вычислить дифференциал функции. В данном случае $dx=2{,}01-2=0{,}01$, и дифференциалом функции будет:

$$dy=(3x^2+4x+4)\,dx=(3\cdot 2^2+4\cdot 2+4)\cdot 0{,}01=0{,}24.$$

Сравнивая dy и Δy, видим, что они совпадают до третьего десятичного знака.

51. Некоторые дифференциальные уравнения. Мы показали, что, заменяя в промежутке $(x, x+dx)$ приращение функции ее дифференциалом, мы применяем закон прямой пропорциональности между приращениями функции и независимой переменной с соответствующим коэффициентом пропорциональности, и что такая замена приводит к ошибке, которая является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с dx. На этом основано применение анализа бесконечно малых к исследованию явлений природы.

Наблюдая некоторый процесс, стараются разбить его на малые элементы, к каждому из которых, пользуясь его малостью, применяют закон прямой пропорциональности. В пределе получают таким образом уравнение, представляющее собою соотношение между независимой переменной, функцией и их дифференциалами (или производной). *Уравнение это называется дифференциальным уравнением,* соответствующим рассматриваемому процессу. Задача нахождения самой функции по дифференциальному уравнению есть задача *интегрирования дифференциального уравнения.*

Итак, при применении анализа бесконечно малых к изучению какого-либо закона природы, необходимо составить дифференциальное уравнение рассматриваемого закона природы и проинтегрировать его. Эта последняя задача обычно бывает гораздо труднее первой, и о ней мы будем говорить впоследствии. В дальнейших примерах выведем дифференциальные уравнения, соответствующие некоторым простейшим явлениям природы.

1. *Барометрическая формула.* Давление атмосферы p, рассчитываемое на единицу площади, есть, очевидно, функция высоты h над поверхностью земли. Рассмотрим вертикальный цилиндрический столб воздуха с площадью поперечного сечения, равной единице. Проведем два поперечных сечения A и A_1 на высотах h и $h+dh$. При переходе от сечения A к сечению A_1 давление p уменьшится (если $dh>0$) на величину, равную весу воздуха, который заключается в части цилиндра между A и A_1. Если dh мала, можем приближенно считать плотность ρ воздуха в этой части цилиндра постоянной. Площадь основания столбика AA_1 равна единице, его высота dh и, следовательно, объем dh, а искомый вес $\rho\,dh$. Итак, уменьшение p (при $dh>0$) равно $\rho\,dh$:

$$dp=-\rho\,dh.$$

Согласно закону Бойля — Мариотта, плотность ρ пропорциональна давлению p:

$$\rho = cp \qquad (c \text{ — постоянная}),$$

и мы окончательно получаем дифференциальное уравнение:

$$dp = -cp\,dh \qquad \text{или} \qquad \frac{dp}{dh} = -cp.$$

2. *Химические реакции первого порядка.* Пусть некоторое вещество, масса которого есть a, вступает в химическую реакцию. Обозначим буквою x ту часть этой массы, которая уже вступила в реакцию к моменту времени t, отсчитываемому от начала реакции. Очевидно, x есть функция от t. Для некоторых реакций можно приближенно считать, что количество вещества dx, вступившее в реакцию за промежуток времени от момента t до момента $t + dt$, при малом dt пропорционально dt и количеству вещества, которое к моменту t оставалось не вступившим в реакцию:

$$dx = c(a - x)dt \qquad \text{или} \qquad \frac{dx}{dt} = c(a - x).$$

Преобразуем это дифференциальное уравнение, вводя вместо x новую функцию $y = a - x$, где y обозначает массу, которая остается не вступившей в реакцию к моменту времени t. Принимая во внимание, что a есть постоянная, получим:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dx}{dt},$$

и дифференциальное уравнение химических реакций первого порядка может быть переписано в виде:

$$\frac{dy}{dt} = -cy.$$

3. *Закон охлаждения.* Положим, что некоторое тело, нагретое до высокой температуры, помещается в среду, имеющую постоянную температуру 0°. При охлаждении тела его температура θ будет функцией времени t, которое мы будем отсчитывать от момента помещения тела в среду. Количество тепла dQ, отданного телом за промежуток времени dt, будем приближенно считать пропорциональным длительности dt этого промежутка и разности температур тела и среды к моменту времени t (закон охлаждения Ньютона). Мы можем тогда написать:

$$dQ = c_1 \theta\,dt \qquad (c_1 \text{ — постоянная}).$$

Обозначив буквою k теплоемкость тела, имеем:

$$dQ = -k\,d\theta,$$

где мы пишем знак (—), так как $d\theta$ в рассматриваемом случае отрицательно (температура понижается). Сравнивая эти два выражения dQ, получим:

$$d\theta = -c\theta\,dt \quad \left(c = \frac{c_1}{k}\right) \qquad \text{или} \qquad \frac{d\theta}{dt} = -c\theta;$$

c есть величина постоянная, если мы будем считать теплоемкость k постоянной. Выведенные нами дифференциальные уравнения имеют одинаковую форму. Все они выражают то свойство, что производная пропорциональна самой функции с отрицательным коэффициентом пропорциональности ($-c$).

В [38] мы показали, что при непрерывных процентах с основного капитала a через t лет образуется наращенный капитал ae^{kt}, где k — процентная такса, выраженная в сотых долях:

$$y = ae^{kt}. \qquad (7)$$

Вычисляя производную, получим:

$$y' = ake^{kt} = ky, \qquad (8)$$

т. е. в этом случае мы получаем то же свойство пропорциональности производной и самой функции, благодаря чему свойство это называют *законом сложных процентов*. Впоследствии мы покажем, что функция (7) дает *все* решения дифференциального уравнения (8) при *произвольном* значении постоянной a, вместо которой будем писать C.

Таким образом, решения наших уравнений могут быть представлены в виде (заменяя k на $-c$):

$$p(h) = Ce^{-ch}, \quad y(t) = Ce^{-ct}, \quad \theta(t) = Ce^{-ct}, \qquad (9)$$

где C — постоянная. Определим теперь физическое значение постоянной C в каждой из предыдущих формул. Подставляя в первую из формул $h=0$, получим:

$$C = p(0) = p_0,$$

где p_0 есть, таким образом, давление атмосферы при $h=0$, т. е. на поверхности земли. Вторая из формул при $t=0$ даст нам:

$$C = y(0),$$

т. е. C есть масса, не вступившая в реакцию в начальный момент времени, и ее мы раньше обозначали буквою a. Наконец, подставляя $t=0$ в третью из формул (9), убедимся также, что C есть начальная температура θ_0 тела в момент его помещения в среду. Итак, окончательно имеем:

$$p(h) = p_0e^{-ch}, \quad y(t) = ae^{-ct}, \quad \theta(t) = \theta_0e^{-ct}. \qquad (10)$$

52. Оценка погрешностей. При практическом определении или неточном вычислении какой-либо величины x получается ошибка Δx, которая называется *абсолютной ошибкой* или *абсолютной погрешностью* наблюдения или вычисления. Она не характеризует точности наблюдения. Например, ошибка около 1 *см* при определении длины комнаты практически допустима, а такая же ошибка при определении расстояния двух близких предметов (например, свечи от экрана фотометра) указывает на большую неточность измерения. Поэтому вводят еще понятие об *относительной погрешности*, которая равна абсолютной величине отношения $\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$ абсолютной погрешности к значению самой измеряемой величины.

Положим теперь, что некоторая величина y определяется из уравнения $y=f(x)$. Ошибка Δx при определении величины x повлечет за собой ошибку Δy. При малых значениях Δx можно заменить приближенно Δy дифференциалом dy, так что относительная погрешность при определении величины y выражается формулой

$$\left|\frac{dy}{y}\right|.$$

Примеры. 1. Сила тока i определяется, как известно, по тангенс-гальванометру из формулы:

$$i = c \operatorname{tg} \varphi.$$

Пусть $d\varphi$ — ошибка при отсчете угла φ:

$$di = \frac{c}{\cos^2 \varphi}\, d\varphi, \quad \frac{di}{i} = \frac{c}{\cos^2 \varphi \cdot c \operatorname{tg} \varphi}\, d\varphi = \frac{2}{\sin 2\varphi}\, d\varphi,$$

откуда видно, что относительная ошибка $\left|\frac{di}{i}\right|$ при определении i будет тем меньше, чем ближе φ к 45°.

2. Рассмотрим произведение uv:

$$d(uv) = v\,du + u\,dv, \quad \frac{d(uv)}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v},$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{d(uv)}{uv}\right| \leqslant \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|,$$

т. е *относительная ошибка произведения не больше суммы относительных ошибок сомножителей.*

То же правило получаем и для частного, так как:

$$d\,\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2},$$

$$\frac{d\,\frac{u}{v}}{\frac{u}{v}} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}; \qquad \left|\frac{d\,\frac{u}{v}}{\frac{u}{v}}\right| \leqslant \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|.$$

3. Рассмотрим формулу для площади круга:

$$Q = \pi r^2, \quad dQ = 2\pi r\,dr, \quad \frac{dQ}{Q} = \frac{2\pi r\,dr}{\pi r^2} = 2\,\frac{dr}{r},$$

т. е. относительная ошибка при определении площади круга по написанной выше формуле равна удвоенной относительной ошибке при определении радиуса.

4. Положим, что определяется угол φ по логарифму его синуса и тангенса. Согласно правилам дифференцирования имеем:

$$d(\log_{10}\sin\varphi) = \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\log 10\cdot\sin\varphi}, \quad d(\log_{10}\operatorname{tg}\varphi) = \frac{d\varphi}{\log 10\cdot\operatorname{tg}\varphi\cdot\cos^2\varphi},$$

откуда

$$d\varphi = \frac{\log 10\cdot\sin\varphi}{\cos\varphi}\,d(\log_{10}\sin\varphi), \quad d\varphi = \log 10\cdot\sin\varphi\,\cos\varphi\,d(\log_{10}\operatorname{tg}\varphi). \qquad (11)$$

Предположим, что при определении $\log_{10}\sin\varphi$ и $\log_{10}\operatorname{tg}\varphi$ мы сделали одну и ту же ошибку (эта ошибка зависит от числа десятичных знаков в той таблице логарифмов, которой мы пользуемся). Первая из формул (11) даст для $d\varphi$ величину по абсолютному значению большую, чем вторая из формул (11), так как в первой формуле произведение $\log 10\cdot\sin\varphi$ делится, а во второй формуле умножается на $\cos\varphi$, а $|\cos\varphi| < 1$. Таким образом, при вычислении углов выгоднее пользоваться таблицей для $\log_{10}\operatorname{tg}\varphi$.

§ 4. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

53. Производные высших порядков. Производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть, как мы знаем, также функция от x. Дифференцируя ее, мы получаем новую функцию, которая называется *второй производной* или *производной второго порядка* первоначальной функции $f(x)$ и обозначается так:

$$y'' \quad \text{или} \quad f''(x).$$

Дифференцируя вторую производную, получаем производную третьего порядка или просто третью производную:

$$y''' \quad \text{или} \quad f'''(x).$$

Применяя таким образом операцию дифференцирования, получим производную любого n-го порядка $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$.

Рассмотрим несколько примеров.

1. $y = e^{ax},\ y' = ae^{ax},\ y'' = a^2e^{ax},\ \ldots,\ y^{(n)} = a^ne^{ax}.$

2. $y = (ax+b)^k,\ y' = ak(ax+b)^{k-1},$
$y'' = a^2k(k-1)(ax+b)^{k-2},\ \ldots,$
$y^{(n)} = a^nk(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)(ax+b)^{k-n}.$

3. Мы знаем, что

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad (\cos x)' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

т. е. дифференцирование $\sin x$ и $\cos x$ приводится к прибавлению к аргументу $\frac{\pi}{2}$, а потому:

$$(\sin x)'' = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \sin\left(x + 2\,\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)' = \sin\left(x + 2\,\frac{\pi}{2}\right),$$

и вообще:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{и} \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

4. $y = \log(1+x),\ y' = \frac{1}{1+x},\ y'' = -\frac{1}{(1+x)^2},\ y''' = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},\ \ldots,$
$y^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$

5. Рассмотрим сумму функций:

$$y = u + v + w.$$

Применяя правило дифференцирования суммы и считая, что соответствующие производные функций u, v и w существуют, получим:

$$y' = u' + v' + w',\ y'' = u'' + v'' + w'',\ \ldots,\ y^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)} + w^{(n)},$$

т. е. *производная любого порядка от суммы равна сумме производных того же порядка.* Например:

$y = x^3 - 4x^2 + 7x + 10;\ \ y' = 3x^2 - 8x + 7;\ \ y'' = 6x - 8;\ \ y''' = 6;$
$y^{(4)} = 0$ и, вообще, $y^{(n)} = 0$ при $n > 3$.

Таким же путем можно показать, вообще, что производная n-го *порядка от многочлена m-й степени равна* 0, *если* $n > m$.

Рассмотрим теперь произведение двух функций $y = uv$. Применяя правила дифференцирования произведения и суммы, получим:

$$y' = u'v + uv',$$
$$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$
$$y''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' =$$
$$= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Мы подмечаем следующий закон составления производных: *чтобы составить производную n-го порядка от произведения uv, надо $(u+v)^n$ разложить по формуле бинома Ньютона и в полученном разложении заменить показатели степеней у u и v указателями порядка производных, причем нулевые степени ($u^0 = v^0 = 1$), входящие в крайние члены разложения, заменить самими функциями.*

Правило это называется правилом Лейбница и символически его записывают в следующем виде:

$$y^{(n)} = (u + v)^{(n)}.$$

Докажем справедливость этого правила, пользуясь способом доказательства по индукции. Положим, что для n-й производной это правило справедливо, т. е.

$$y^{(n)} = (u+v)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1}u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(n)}. \quad (1)$$

Чтобы получить $y^{(n+1)}$, надо написанную сумму продифференцировать по x. При этом произведение $u^{(n-k)}v^{(k)}$ в общем члене суммы, согласно правилу дифференцирования произведения, заменится суммой $u^{(n-k+1)}v^{(k)} + u^{(n-k)}v^{(k+1)}$. Но в символических обозначениях эту сумму можно написать в виде:

$$u^{n-k}v^k(u + v).$$

Действительно, раскрывая скобки и заменяя показатели степеней указателями порядка производных, мы и получим сумму $u^{(n-k+1)}v^{(k)} + u^{(n-k)}v^{(k+1)}$. Мы видим, таким образом, что для получения $y^{(n+1)}$ надо каждое слагаемое в сумме (1), а потому и всю эту сумму, помножить символически на $(u+v)$, и, следовательно:

$$y^{(n+1)} = (u+v)^{(n)} \cdot (u+v) = (u+v)^{(n+1)}.$$

Мы показали, что если правило Лейбница справедливо для некоторого n, то оно справедливо и для $(n+1)$. Но непосредственно мы убедились, что оно справедливо для $n = 1$, 2 и 3, а следовательно, оно справедливо и для всех значений n.

Рассмотрим в качестве примера:

$$y = e^x(3x^2 - 1)$$

и найдем $y^{(100)}$:

$$y^{(100)} = (e^x)^{(100)}(3x^2 - 1) + \frac{100}{1}(e^x)^{(99)}(3x^2 - 1)' + \frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2}(e^x)^{(98)}(3x^2 - 1)'' + $$
$$+ \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3}(e^x)^{(97)}(3x^2 - 1)''' + \ldots + e^x(3x^2 - 1)^{(100)}.$$

Все производные полинома второй степени, начиная с третьей, равны тождественно нулю и $(e^x)^{(n)} = e^x$, вследствие чего мы получим:

$$y^{(100)} = e^x(3x^2 - 1) + 100e^x \cdot 6x + 4950e^x \cdot 6 = e^x(3x^2 + 600x + 29\,699).$$

54. Механическое значение второй производной. Рассмотрим прямолинейное движение точки:

$$s = f(t),$$

где, как всегда, t есть время и s — путь, отсчитываемый от определенной точки прямой. Дифференцируя один раз по t, получим *скорость* движения:

$$v = f'(t).$$

Составим вторую производную, которая представляет собою предел отношения $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ при стремлении Δt к нулю. Отношение $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ характеризует быстроту изменения скорости за промежуток времени Δt и дает среднее ускорение за этот промежуток времени, а предел этого отношения при стремлении Δt к нулю дает *ускорение* w рассматриваемого движения в момент времени t:

$$w = f''(t).$$

Положим, что $f(t)$ есть полином второй степени:

$$s = at^2 + bt + c, \quad v = 2at + b, \quad w = 2a,$$

т. е. ускорение w постоянно и коэффициент $a = \frac{1}{2}w$. Подставляя $t = 0$, получим $b = v_0$, т. е. коэффициент b равен начальной скорости, и $c = s_0$, т. е. c равно расстоянию точки в момент времени $t = 0$ от начала координат на прямой. Подставляя найденные значения a, b и c в выражение для s, получим формулу для пути в равномерно ускоренном ($w > 0$) или равномерно замедленном ($w < 0$) движении:

$$s = \frac{1}{2}wt^2 + v_0 t + s_0.$$

Вообще, зная закон изменения пути, мы можем, два раза дифференцируя по t, определить ускорение w, а следовательно, и силу f, производящую движение, так как, согласно второму закону Ньютона, $f = mw$, где m — масса движущейся точки.

Все сказанное годится лишь для прямолинейного движения. В случае криволинейного движения, как доказывается в механике, $f''(t)$ дает лишь проекцию вектора ускорения на касательную к траектории.

Рассмотрим для примера случай гармонического колебательного движения точки M, когда расстояние s этой точки от некоторой определенной точки O на прямой, по которой движется точка M, определяется по формуле:

$$s=a\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t+\omega\right),$$

где a — амплитуда, τ — период колебания и ω — фаза суть величины постоянные. Определим, дифференцируя, скорость v и силу f:

$$v=\frac{2\pi a}{\tau}\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t+\omega\right),\quad f=mw=-\frac{4\pi^2m}{\tau^2}a\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t+\omega\right)=-\frac{4\pi^2m}{\tau^2}s,$$

т. е. сила по величине пропорциональна длине отрезка $\overline{OM}$ и направлена в противоположную сторону. Иными словами, сила направлена всегда от точки M к точке O и пропорциональна удалению точки M от точки O.

55. Дифференциалы высших порядков. Введем теперь понятие о дифференциалах высших порядков функции $y=f(x)$. Ее дифференциал

$$dy=f'(x)\,dx$$

является, очевидно, функцией от x, но не надо забывать при этом, что дифференциал независимой переменной dx считается уже независящим от x [50] и при дальнейшем дифференцировании выносится за знак производной как постоянный множитель. Рассматривая dy как функцию от x, можно составить дифференциал этой функции; он называется дифференциалом второго порядка первоначальной функции $f(x)$ и обозначается символами d^2y или $d^2f(x)$:

$$d^2y=d(dy)=[f'(x)\,dx]'\,dx=f''(x)\,dx^2.$$

Составляя опять дифференциал полученной функции от x, придем к дифференциалу третьего порядка:

$$d^3y=d(d^2y)=[f''(x)\,dx^2]'\,dx=f'''(x)\,dx^3$$

и, вообще, составляя последовательно дифференциалы, придем к понятию о дифференциале n-го порядка функции $f(x)$ и получим для него выражение:

$$d^nf(x)\quad\text{или}\quad d^ny=f^{(n)}(x)\,dx^n. \tag{2}$$

Эта формула позволяет представить производную n-го порядка в виде частного:

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь случай сложной функции $y=f(u)$, где u — функция некоторой независимой переменной. Мы знаем [**50**], что первый дифференциал этой функции имеет тот же вид, как и в том случае, когда u — независимая переменная:

$$dy=f'(u)\,du.$$

При определении дифференциалов высших порядков мы получим формулы, отличные по виду от формулы (2), ибо мы не имеем уже права считать du величиной постоянной, так как u не является независимой переменной. Так, например, для дифференциала второго порядка будем иметь, применяя правило для нахождения дифференциала произведения, выражение:

$$d^2y=d\,[f'(u)\,du]=du\,d\,[f'(u)]+f'(u)\,d\,(du)=f''(u)\,du^2+f'(u)\,d^2u,$$

которое содержит, по сравнению с формулой (2), добавочное слагаемое $f'(u)\,d^2u$.

Если u есть независимая переменная, то du надо считать величиной постоянной и $d^2u=0$. Положим теперь, что u есть линейная функция независимой переменной t, т. е.

$$u=at+b.$$

При этом $du=a\,dt$, т. е. du есть опять величина постоянная, а потому дифференциалы высших порядков сложной функции будут выражены по формуле (2):

$$d^nf(u)=f^{(n)}(u)\,du^n,$$

т. е. *выражение* (2) *для дифференциалов высших порядков годится в том случае, если x есть независимая переменная или линейная функция независимой переменной.*

56. Разности функций. Обозначим буквою h приращение независимой переменной. Соответственное приращение функции $y=f(x)$ будет:

$$\Delta y=f(x+h)-f(x). \tag{4}$$

Его называют иначе *разностью первого порядка* функции $f(x)$. Эта разность есть, в свою очередь, функция от x, и мы можем найти разность этой функции, вычисляя значение этой функции при $x+h$ и x и вычитая из первого результата второй. Эта разность называется *разностью второго порядка* первоначальной функции $f(x)$

и обозначается символом $\Delta^2 y$. Нетрудно выразить $\Delta^2 y$ через значения самой функции $f(x)$:

$$\Delta^2 y = \Delta(\Delta y) = [f(x+2h) - f(x+h)] - [f(x+h) - f(x)] =$$
$$= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x). \qquad (5)$$

Эта разность второго порядка также есть функция от x, и, определяя разность этой функции, получим *разность третьего порядка* $\Delta^3 y$ первоначальной функции $f(x)$. Заменяя в правой части равенства (5) x на $x+h$ и вычитая из полученного результата правую часть равенства (5), будем иметь выражение для $\Delta^3 y$:

$$\Delta^3 y = [f(x+3h) - 2f(x+2h) + f(x+h)] -$$
$$- [f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)] =$$
$$= f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x).$$

Таким образом, можно последовательно определить разность любого порядка, и *разность n-го порядка* $\Delta^n y$ будет иметь следующее выражение через значения функции $f(x)$:

$$\Delta^n y = f(x+nh) - \frac{n}{1} f(x+\overline{n-1}h) + \frac{n(n-1)}{2!} f(x+\overline{n-2}h) -$$
$$- \ldots + (-1)^k \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} f(x+\overline{n-k}h) + \ldots +$$
$$+ (-1)^n f(x). \qquad (6)$$

Выше мы убедились в справедливости этой формулы при $n = 1$, 2 и 3. Для ее полного доказательства надо применить обычный способ доказательства от n к $(n+1)$. Заметим, что для вычисления $\Delta^n y$ надо знать $(n+1)$ значения функции $f(x)$ при значениях аргумента: x, $x+h$, $x+2h$, ..., $x+nh$. Эти значения образуют арифметическую прогрессию с разностью h, или, как говорят, являются равноотстоящими значениями.

При малых значениях h разность Δy мало отличается от дифференциала dy. Точно так же разности высших порядков будут давать приближенные значения дифференциалов соответствующих порядков, и наоборот. Если, например, функция задана таблично при равноотстоящих значениях аргумента, то мы, не имея аналитического выражения функции, не в состоянии точно вычислить значения ее производных различных порядков, но вместо точной формулы (3) можем получить приближенное значение производных, вычисляя отношение $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$. Составим для примера таблицу разностей и дифференциалов функции $y = x^3$ в промежутке (2, 3), принимая:

$$\Delta x = h = 0{,}1.$$

Для составления этой таблицы были вычислены последовательные значения функции $y = x^3$, из них при помощи вычитания, согласно формуле (4), были получены значения Δy, из них также при помощи вычитания получились значения $\Delta^2 y$ и т. д. Такой способ последовательного вычисления разностей, конечно, проще, чем вычисление по формуле (6). Дифференциалы вычисляются по известным формулам, указанным наверху таблицы, причем надо положить $dx = h = 0{,}1$.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$dy = 3x^2 dx$	$d^2 y = 6x dx^2$	$d^3 y = 6dx^3$	$d^4 y = 0$
2	8,000	1,261	0,126	0,006	0	1,200	0,120	0,006	0
2,1	9,261	1,387	0,132	0,006	0	1,323	0,126	0,006	0
2,2	10,648	1,519	0,138	0,006	0	1,452	0,132	0,006	0
2,3	12,167	1,657	0,144	0,006	0	1,587	0,138	0,006	0
2,4	13,824	1,801	0,150	0,006	0	1,728	0,144	0,006	0
2,5	15,625	1,951	0,156	0,006	0	1,875	0,150	0,006	0
2,6	17,576	2,107	0,162	0,006	0	2,028	0,156	0,006	0
2,7	19,683	2,269	0,168	0,006	—	2,187	0,162	0,006	—
2,8	21,952	2,437	0,174	—	—	2,352	0,168	—	—
2,9	24,389	2,611	—	—	—	2,523	—	—	—
3	27,000	—	—	—	—	—	—	—	—

Сравним точное и приближенное значения второй производной y'' при $x = 2$. В рассматриваемом случае $y'' = 6x$ и $y'' = 12$ при $x = 2$. Приближенно эта производная выражается отношением $\frac{\Delta^2 y}{h^2}$, и при $x = 2$ мы получим:

$$\frac{0{,}126}{(0{,}1)^2} = 12{,}6.$$

Если $f(x)$ есть целый многочлен от x:

$$y = f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m,$$

то, вычисляя Δy по формуле (4), получим для Δy выражение в виде целого многочлена $(m-1)$-й степени со старшим членом $m a_0 h x^{m-1}$, что нетрудно проверить. Таким образом, в случае $y = x^3$, Δy будет полиномом второй степени от x, $\Delta^2 y$ — полиномом первой степени, $\Delta^3 y$ — постоянной и $\Delta^4 y$ — нулем (см. таблицу). Предлагаем читателю в качестве упражнения показать, что значения $d^2 y$ должны в рассматриваемом примере на одну ступень запаздывать по сравнению с $\Delta^2 y$, что видно из таблицы.

§ 5. ПРИЛОЖЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ПРОИЗВОДНОЙ К ИЗУЧЕНИЮ ФУНКЦИИ

57. Признаки возрастания и убывания функций. Знание производной дает возможность изучать различные свойства функций. Мы начнем с наиболее простого и основного вопроса, а именно с вопроса о возрастании и убывании функции.

Функция $f(x)$ *называется возрастающей в некотором промежутке, если в этом промежутке бо́льшим значениям независимой переменной соответствуют и бо́льшие значения функции,* т. е. *если*

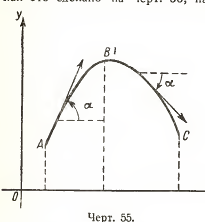
$$f(x+h)-f(x)>0 \quad \text{при} \quad h>0.$$

Наоборот, если мы имеем:

$$f(x+h)-f(x)<0 \quad \text{при} \quad h>0,$$

то функция называется убывающей.

Если мы обратимся к графику функции, то промежутки возрастания будут соответствовать тем частям графика, на которых бо́льшим абсциссам соответствуют и бо́льшие ординаты. Если мы, как это сделано на черт. 55, направим ось OX вправо и ось OY наверх, то промежутку возрастания функции будут соответствовать такие части графика, что при движении вдоль кривой вправо в направлении возрастающих абсцисс мы подымаемся вверх. Наоборот, промежуткам убывания соответствуют части кривой, опускающиеся вниз при движении вдоль кривой вправо. На черт. 55 часть графика AB соответствует промежутку возрастания, а часть BC — промежутку убывания. Из чертежа непосредственно ясно, что на первом участке касательная образует с направлением оси OX угол α, отсчитываемый от оси OX до касательной, тангенс которого положителен. Но тангенс этого угла есть как раз первая производная $f'(x)$. Наоборот, на участке BC направление касательной образует с направлением OX угол α (в четвертой четверти), тангенс которого отрицателен, т. е. для этого случая $f'(x)$ будет величиной отрицательной. Сопоставляя полученные результаты, мы приходим к следующему правилу: *те промежутки, в которых* $f'(x)>0$, *суть промежутки возрастания функции, а те промежутки, в которых* $f'(x)<0$, *суть промежутки убывания функции.*



Черт. 55.

Мы пришли к этому правилу, пользуясь чертежом. В дальнейшем дадим для него строгое аналитическое доказательство. Сейчас же мы применим полученное правило к некоторым примерам.

1. Докажем неравенство:

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} \quad \text{при} \quad x > 0.$$

Для этого составим разность:

$$f(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right).$$

Определим производную $f'(x)$:

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} - (1 - \cos x) = \frac{x^2}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} =$$
$$= 2\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{x}{2}\right)^2\right].$$

Принимая во внимание, что по абсолютной величине сама дуга больше своего синуса, можем утверждать, что $f'(x) > 0$ в промежутке $(0, +\infty)$, т. е. в этом промежутке $f(x)$ возрастает, но $f(0) = 0$, и потому

$$f(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) > 0 \quad \text{при} \quad x > 0,$$

т. е.

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} \quad \text{при} \quad x > 0.$$

2. Точно так же можно доказать неравенство

$$x > \log(1 + x) \quad \text{при} \quad x > 0.$$

Составим разность:

$$f(x) = x - \log(1 + x),$$

откуда

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x}.$$

Из этого выражения видно, что при $x > 0$ и $f'(x) > 0$, т. е. $f(x)$ возрастает в промежутке $(0, +\infty)$, но $f(0) = 0$, и, следовательно:

$$f(x) = x - \log(1 + x) > 0 \quad \text{при} \quad x > 0,$$

т. е.

$$x > \log(1 + x) \quad \text{при} \quad x > 0.$$

3. Рассмотрим уравнение Кеплера, о котором мы говорили в [31]:

$$x = q\sin x + a \qquad (0 < q < 1).$$

Мы можем переписать его в виде:

$$f(x) = x - q\sin x - a = 0.$$

Составляя производную $f'(x)$, получим:

$$f'(x) = 1 - q\cos x.$$

Принимая во внимание, что произведение $q\cos x$ по абсолютному значению меньше единицы, так как по условию q заключается между нулем и единицей, можем утверждать, что $f'(x) > 0$ при любом значении x, а потому $f(x)$ возрастает в промежутке $(-\infty, +\infty)$ и, следовательно, не может обратиться более одного раза в нуль, т. е. уравнение Кеплера не может иметь более одного вещественного корня.

Если постоянная a кратна π, т. е. $a = k\pi$, где k — целое число, то, непосредственно подставляя $x = k\pi$, получим $f(k\pi) = 0$, и $x = k\pi$ будет единственным корнем уравнения Кеплера. Если a не кратно π, то можно найти такое целое число k, что

$$k\pi < a < (k+1)\pi.$$

Подставляя $x = k\pi$ и $(k+1)\pi$, получим:

$$f(k\pi) = k\pi - a < 0,$$
$$f(\overline{k+1}\pi) = (k+1)\pi - a > 0.$$

Но если $f(k\pi)$ и $f(\overline{k+1}\pi)$ разных знаков, то $f(x)$ должно обращаться в нуль внутри промежутка $(k\pi, \overline{k+1}\pi)$ [35], т. е. внутри этого промежутка будет находиться единственный корень уравнения Кеплера.

4. Рассмотрим уравнение

$$f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 15 = 0.$$

Составим производную $f'(x)$ и приравняем ее нулю:

$$f'(x) = 15x^4 - 75x^2 + 60 = 15(x^4 - 5x^2 + 4) = 0.$$

Решая это биквадратное уравнение, получим, что $f'(x)$ обращается в нуль при

$$x = -2, \quad -1, \quad +1 \quad \text{и} \quad +2.$$

Таким образом, весь промежуток $(-\infty, +\infty)$ мы можем разбить на пять промежутков:

$$(-\infty, -2), \ (-2, -1), \ (-1, 1), \ (1, 2), \ (2, +\infty),$$

внутри которых $f'(x)$ сохраняет уже неизменный знак, а потому $f(x)$ меняется монотонно, т. е. или возрастает или убывает, и не может поэтому внутри каждого из этих промежутков иметь более одного корня. Если на концах какого-либо из этих промежутков $f(x)$ имеет разные знаки, то уравнение $f(x) = 0$ имеет внутри такого промежутка один корень, а если эти знаки одинаковые, то внутри соответствующего промежутка корней нет. Таким образом, для определения числа корней уравнения остается определить знаки $f(x)$ на концах каждого из пяти указанных промежутков.

Для определения знака $f(x)$ при $x = \pm\infty$ представим $f(x)$ в виде:

$$f(x) = x^5\left(3 - \frac{25}{x^2} + \frac{60}{x^4} + \frac{15}{x^5}\right).$$

При стремлении x к $(-\infty)$, $f(x)$ стремится к $(-\infty)$, ибо x^5 при этом стремится к $(-\infty)$, а выражение, стоящее в круглых скобках, — к 3. Точно так же убедимся в том, что при стремлении x к $(+\infty)$ и $f(x)$ стремится к $(+\infty)$. Подставляя значения $x = -2$, -1, 1 и 2, получим следующую таблицу:

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

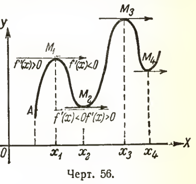
Оказывается, что $f(x)$ имеет разные знаки только на концах промежутка $(-1, +1)$, и, следовательно, рассматриваемое уравнение имеет только один вещественный корень, заключающийся внутри этого промежутка.

Выше мы определили возрастание и убывание функции в промежутке. Иногда говорят, что функция возрастает или убывает в точке $x=x_0$. Это значит следующее: функция возрастает при $x=x_0$, если $f(x)<f(x_0)$ при $x<x_0$ и $f(x)>f(x_0)$ при $x>x_0$, причем x считается достаточно близким к x_0. Аналогично определяется убывание функции в точке. Из понятия производной непосредственно вытекает достаточное условие возрастания и убывания в точке x_0, а именно, если $f'(x_0)>0$, то функция возрастает в точке x_0, и если $f'(x_0)<0$, то функция убывает в точке x_0. Действительно, если, например, $f'(x_0)>0$, то отношение

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

имеющее предел $f'(x_0)$, будет также положительным при всех h, достаточно малых по абсолютной величине, т. е. числитель и знаменатель будут одинаковых знаков. Иначе говоря, будет: $f(x_0+h)-f(x_0)>0$ при $h>0$ и $f(x_0+h)-f(x_0)<0$ при $h<0$, что и дает возрастание в точке x_0.

58. Максимумы и минимумы функций. Обратимся вновь к рассмотрению графика некоторой функции $f(x)$ (черт. 56). На этом графике мы имеем последовательное чередование промежутков возрастания и убывания функции. Дуга AM_1 соответствует промежутку возрастания. Следующая за ней дуга M_1M_2 — промежутку убывания, следующая M_2M_3 — опять промежутку возрастания и т. д. Те точки кривой, которые отделяют промежутки возрастания от промежутков убывания, являются вершинами кривой. Рассмотрим, например, вершину M_1. Ордината в этой вершине больше всех ординат кривой, достаточно близких к рассматриваемой и лежащих как слева, так и справа от нее. Говорят, что такой вершине соответствует максимум функции $f(x)$.



Черт. 56.

Это приводит к следующему общему аналитическому определению: *функция $f(x)$ достигает максимума в точке $x=x_1$, если ее значение $f(x_1)$ в этой точке больше всех ее значений в ближайших точках*, т. е. *если приращение функции*

$$f(x_1+h)-f(x_1)<0$$

при всяких h как положительных, так и отрицательных, достаточно малых по абсолютному значению.

Обратимся к рассмотрению вершины M_2. В этой вершине, наоборот, ордината меньше всех соседних с ней ординат, лежащих как слева, так и справа, и говорят, что этой вершине соответствует минимум функции, и аналитическое определение будет: *функция* $f(x)$ *достигает минимума в точке* $x = x_2$, *если выполнено условие*

$$f(x_2 + h) - f(x_2) > 0$$

при всяких h как положительных, так и отрицательных, достаточно малых по абсолютной величине.

Из чертежа мы видим, что как в вершинах, соответствующих максимуму функции, так и в вершинах, соответствующих минимуму функции $f(x)$, касательная параллельна оси OX, т. е. ее угловой коэффициент $f'(x)$ равен нулю. Но параллельность касательной оси OX может иметь место и не только в вершинах кривой. Так, например, на черт. 57 мы имеем точку кривой M, которая не является вершиной и в которой все же касательная параллельна оси OX.

Положим, что $f'(x)$ обращается в нуль при некотором значении $x = x_0$, т. е. в соответствующем месте графика касательная параллельна оси OX. Исследуем знак $f'(x)$ при значениях x, близких к x_0.

Рассмотрим следующие три случая.

I. При значениях x, меньших x_0 и достаточно близких к x_0, $f'(x)$ положительна, а при значениях x, бо́льших x_0 и достаточно близких к x_0, $f'(x)$ отрицательна, т. е., иными словами, $f'(x)$ при переходе x через x_0 переходит через нуль от положительных значений к отрицательным.

Черт. 57.

В этом случае мы имеем слева от $x = x_0$ промежуток возрастания и справа — промежуток убывания, т. е. значению $x = x_0$ соответствует вершина кривой, дающая максимум функции $f(x)$ (черт. 56).

II. При значениях x, меньших x_0, $f'(x)$ отрицательна, а при значениях x, бо́льших x_0, положительна, т. е. $f'(x)$ при переходе через нуль идет от отрицательных значений к положительным.

В этом случае слева от точки $x = x_0$ мы имеем промежуток убывания, а справа — промежуток возрастания, т. е. значению $x = x_0$ соответствует вершина кривой, дающая минимум функции (черт. 56).

III. При значениях x как меньших, так и бо́льших x_0, $f'(x)$ имеет один и тот же знак. Положим, например, что это есть знак $(+)$.

В этом случае соответствующая точка графика лежит внутри промежутка возрастания и вовсе не является вершиной (черт. 57).

Сказанное приводит нас к следующему правилу нахождения тех значений x, при которых $f(x)$ достигает максимума или минимума:

1) *нужно составить* $f'(x)$;

2) ***найти те значения*** x, ***при которых*** $f'(x)$ ***обращается в нуль***, т. е. ***решить уравнение*** $f'(x) = 0$;

3) *исследовать изменения знака $f'(x)$ при переходе через эти значения по следующей схеме:*

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$	$f(x)$
$f'(x)$	$+$ $-$ $+$ $-$	0	$-$ $+$ $+$ $-$	максимум минимум возрастает убывает

Обозначения $x_0 - h$ и $x_0 + h$ в приведенной таблице показывают, что нужно определить знаки функции $f'(x)$ при значениях x, меньших и бо́льших x_0, но достаточно близких, так что h считается достаточно малым положительным числом.

При этом исследовании предполагается, что $f'(x_0) = 0$, но при всех x, достаточно близких к x_0 и отличных от x_0, $f'(x)$ отлична от нуля.

Обратим еще внимание, что в случае черт. 57 касательная в точке M с абсциссою x_0 находится по разные стороны от кривой в окрестности этой точки. В данном случае $f'(x_0) = 0$ и $f'(x) > 0$ при всех x, близких к x_0 и отличных от x_0, и весь участок кривой с точкой x_0 внутри дает промежуток возрастания, несмотря на то, что $f'(x_0) = 0$.

Иногда вместо указанного выше определения максимума дают несколько другое, а именно: функция $f(x)$ достигает максимума в точке $x = x_1$, если ее значение $f(x_1)$ в этой точке не меньше ее значений в ближайших точках, т. е. если приращение функции $f(x_1 + h) - f(x_1) \leqslant 0$ при всяких h, как положительных так и отрицательных, достаточно малых по абсолютной величине. Аналогично минимум в точке x_2 можно определить неравенством $f(x_2 + h) - f(x_2) \geqslant 0$. Если при этом определении функция имеет в точке максимума или минимума производную, то эта производная должна, как и выше, обращаться в нуль.

Рассмотрим пример. Пусть требуется найти максимумы и минимумы функции:

$$f(x) = (x - 1)^2 (x - 2)^3.$$

Составим первую производную:

$$f'(x) = 2(x-1)(x-2)^3 + 3(x-1)^2(x-2)^2 =$$
$$= (x-1)(x-2)^2(5x-7) = 5(x-1)(x-2)^2\left(x - \frac{7}{5}\right).$$

Из последнего выражения видно, что $f'(x)$ обращается в нуль при следующих значениях независимой переменной: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{7}{5}$ и $x_3 = 2$.

Переходим к их исследованию. При $x = 1$ множитель $(x-2)^2$ имеет знак плюс, множитель $\left(x - \frac{7}{5}\right)$ — знак минус. При всех значениях x как меньших, так и бóльших единицы, но достаточно близких к единице, знаки этих множителей будут те же самые и, следовательно, произведение этих двух множителей имеет безусловный знак минус при всех значениях x, достаточно близких к единице. Обратимся, наконец, к рассмотрению последнего множителя $(x-1)$, который как раз обращается в нуль при $x = 1$. В случае $x < 1$ он имеет знак минус, а при $x > 1$ — знак плюс. Таким образом, все произведение, т. е. $f'(x)$, имеет при $x < 1$ знак плюс и при $x > 1$ знак минус. Откуда следует, что значению $x = 1$ соответствует максимум функции $f(x)$. Подставляя значение $x = 1$ в выражение самой функции $f(x)$, мы получим величину найденного максимума, т. е. ординату соответствующей вершины графика функции

$$f(1) = 0^2 \cdot (-1)^3 = 0.$$

Повторяя аналогичные рассуждения и для остальных значений $x_2 = \frac{7}{5}$ и $x_3 = 2$, мы получим следующую табличку:

x	$1-h$	1	$1+h$	$\frac{7}{5}-h$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{5}+h$	$2-h$	2	$2+h$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$
$f(x)$	возр.	0 макс	убывает		$-\frac{108}{3125}$ миним.	возрастает			

В указанном нами способе исследования максимумов и минимумов функции представляется несколько затруднительным, особенно в более сложных примерах, определение знака $f'(x)$ при значениях x как меньших, так и бóльших испытуемого. Во многих случаях этого можно избегнуть, если ввести в рассмотрение вторую производную $f''(x)$. Положим, что нам надо испытать значение $x = x_0$, при котором $f'(x_0) = 0$. Подставим это значение $x = x_0$ в выражение второй производной и положим, что мы получили положительную величину, т. е. $f''(x_0) > 0$. Если принять $f'(x)$ за основную функцию, то $f''(x)$ будет ее производной и положительность этой производной в точке $x = x_0$ показывает, что сама основная функция $f'(x)$ возрастает в соответствующей точке, т. е. $f'(x)$ при переходе через нуль в точке $x = x_0$ должна итти от отрицательных значений к положительным. Таким образом, *в случае $f''(x_0) > 0$ в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ будет достигать минимума. Точно так же можно показать, что в случае $f''(x_0) < 0$ в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ достигает максимума.* Если, наконец, при подстановке $x = x_0$ в выражение $f''(x)$ мы получим нуль, т. е. $f''(x_0) = 0$, то пользование второй производной не дает возможности исследовать значение

$x = x_0$, и приходится обращаться к непосредственному исследованию знака $f'(x)$. Мы получаем, таким образом, изображенную в таблице схему:

x	$f'(x)$	$f''(x)$	$f(x)$
x_0	0	$-$ $+$ 0	максимум минимум сомнительный случай

Из приведенных рассуждений непосредственно следует, что при наличии производной второго порядка необходимым условием максимума является неравенство $f''(x) \leqslant 0$, а необходимым условием минимума — неравенство $f''(x) \geqslant 0$. При этом мы можем определять максимум условием $f(x_1 + h) - f(x_1) \leqslant 0$ и минимум — условием $f(x_2 + h) - f(x_2) \geqslant 0$, как мы об этом говорили выше.

Пример. Требуется найти максимумы и минимумы функции

$$f(x) = \sin x + \cos x.$$

Эта функция имеет период 2π, т. е. не меняется при замене x на $x + 2\pi$. Достаточно исследовать промежуток изменения x от 0 до 2π.

Составим производные первого и второго порядка:

$$f'(x) = \cos x - \sin x; \quad f''(x) = -\sin x - \cos x.$$

Приравнивая первую производную нулю, получим уравнение:

$$\cos x - \sin x = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x = 1.$$

Корни этого уравнения из промежутка $(0, 2\pi)$ будут:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{5\pi}{4}.$$

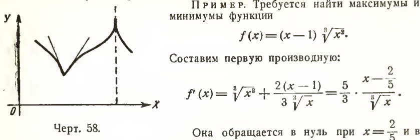
Исследуем эти значения x по знаку $f''(x)$:

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2} < 0; \quad \text{максимум } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2};$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{4} = \sqrt{2} > 0; \quad \text{минимум } f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$$

В заключение обратим внимание на одно обстоятельство, которое иногда имеет место при нахождении максимумов и минимумов. Может случиться, что на графике функции имеются такие точки, в которых касательной или вовсе нет или она параллельна оси OY (черт. 58). В точках первого рода производная $f'(x)$ вовсе не будет существовать, а в точках второго рода она будет равна бесконечности, так как угловой коэффициент прямой, параллельной оси OY, равен бесконечности. Но, как непосредственно видно из чертежа, в таких точках может встретиться максимум или минимум функции. Таким образом, мы должны, строго говоря, дополнить предыдущее правило нахождения максимумов и минимумов следующим указанием: *максимум и минимум функции $f(x)$ может встретиться не только в тех точках, где $f'(x)$ обращается в нуль, но и в тех точках, где она не существует*

или обращается в бесконечность. Исследование последних точек надо производить по первой из схем, указанных выше, а именно — путем определения знака $f'(x)$ при значениях x, меньших и бо́льших исследуемого.



Черт. 58.

Пример. Требуется найти максимумы и минимумы функции

$$f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}.$$

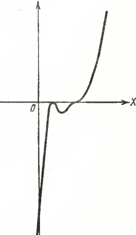
Составим первую производную:

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5}{3}\cdot\frac{x-\frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}.$$

Она обращается в нуль при $x=\frac{2}{5}$ и в бесконечность при $x=0$. Исследуем последнее значение: числитель написанной выше дроби имеет при $x=0$ знак минус и при всех значениях x, как бо́льших, так и меньших нуля, но близких к нему, он будет иметь тот же знак. Знаменатель дроби при $x<0$ имеет знак минус, а при $x>0$ знак плюс. Следовательно, вся дробь имеет при $x<0$ и близких к нулю знак плюс, а при $x>0$ — знак минус, т. е. при $x=0$ мы имеем максимум $f(0)=0$. В точке $x=\frac{2}{5}$ будем иметь минимум

$$f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}} = -\frac{3}{25}\sqrt[3]{20}.$$

59. Построение графиков. Разыскание максимумов и минимумов функции $f(x)$ существенным образом облегчает построение графика этой функции. Выясним на некоторых примерах простейшую схему построения графиков функций.



Черт. 59.

1. Пусть требуется построить график функции

$$y = (x-1)^2(x-2)^3,$$

исследованной нами в предыдущем номере. Мы получили там две вершины этой кривой, а именно, максимум (1, 0) и минимум $\left(\frac{7}{5}, -\frac{108}{3125}\right)$. Отметим эти точки на чертеже. Кроме того, полезно отметить и следы искомой кривой на осях. При $x=0$ мы имеем $y=-8$, т. е. след на оси OY будет $y=-8$.

Приравнивая y нулю, т. е.

$$(x-1)^2(x-2)^3 = 0,$$

мы получим следы на оси OX. Один из них, $x=1$, как мы уже выяснили, является вершиной, а другой, $x=2$, как это было выяснено в предыдущем номере, вершиной не является, но в соответствующей точке графика касательная параллельна оси OX. Искомая кривая изображена на черт. 59.

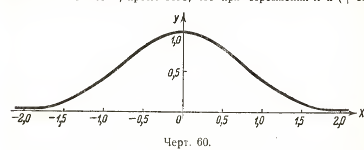
2. Вычертим кривую

$$y = e^{-x^2}.$$

Составим первую производную

$$y' = -2xe^{-x^2}.$$

Приравнивая y' нулю, получим значение $x = 0$, которому, как нетрудно видеть, соответствует вершина (максимум) кривой с ординатой $y = 1$. Эта же точка дает и след кривой на оси OY. Приравнивая y нулю, получим уравнение $e^{-x^2} = 0$, которое не имеет решений, т. е. следов на оси OX кривая не имеет. Заметим, кроме того, что при стремлении x к $(+\infty)$ или



Черт. 60.

$(-\infty)$ показатель степени у e^{-x^2} стремится к $(-\infty)$, и все выражение стремится к нулю, т. е. при беспредельном удалении направо и налево кривая беспредельно приближается к оси OX. Соответствующая всем полученным данным кривая изображена на черт. 60.

3. Построим кривую

$$y = e^{-ax} \sin bx \qquad (a > 0),$$

которая дает график так называемого *затухающего колебания*. Множитель $\sin bx$ по абсолютному значению не превышает единицы, и вся кривая будет расположена между двумя кривыми:

$$y = e^{-ax} \quad \text{и} \quad y = -e^{-ax}.$$

При стремлении x к $(+\infty)$ множитель e^{-ax}, а следовательно, и все произведение $e^{-ax} \sin bx$ будет стремиться к нулю, т. е. при беспредельном удалении направо кривая будет безгранично приближаться к оси OX. Следы кривой на оси OX определятся из уравнения

$$\sin bx = 0,$$

т. е. будут

$$x = \frac{k\pi}{b} \qquad (k \text{ — целое число}).$$

Определим первую производную:

$$y' = -ae^{-ax} \sin bx + be^{-ax} \cos bx = e^{-ax}(b \cos bx - a \sin bx).$$

Но выражение, стоящее в круглых скобках, может быть, как известно, представлено в виде:

$$b \cos bx - a \sin bx = K \sin(bx + \varphi_0),$$

где K и φ_0 — постоянные. Приравнивая первую производную нулю, получим уравнение:

$$\sin(bx + \varphi_0) = 0,$$

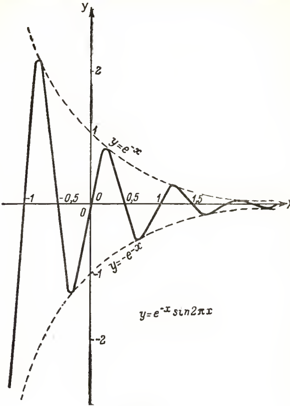
которое дает

$$bx + \varphi_0 = k\pi, \quad \text{т. е.} \quad x = \frac{k\pi - \varphi_0}{b} \qquad (k \text{ — целое число}). \qquad (1)$$

Когда x переходит через эти значения, $\sin(bx+\varphi_0)$ будет всякий раз менять свой знак. То же можно, очевидно, сказать и относительно производной y', так как

$$y' = Ke^{-ax}\sin(bx+\varphi_0),$$

а множитель e^{-ax} знака не меняет. Следовательно, этим корням соответствуют



Черт. 61.

поочередно максимумы и минимумы функции. В случае отсутствия показательного множителя e^{-ax} мы имели бы синусоиду:

$$y = \sin bx,$$

и абсциссы ее вершин получились бы из уравнения:

$$\cos bx = 0,$$

т. е.

$$x = \frac{(2k-1)\pi}{2b} \qquad (k \text{ — целое число}). \tag{1_1}$$

Мы видим, таким образом, что показательный множитель не только уменьшает амплитуды колебаний, но и смещает абсциссы вершин кривой.

Сравнивая уравнения (1) и (1_1), нетрудно видеть, что это смещение равно постоянной величине $\left(-\frac{\pi}{2b}-\frac{\varphi_0}{b}\right)$. На черт. 61 изображен график затухающего колебания при $a=1$ и $b=2\pi$. Вершины кривой не находятся на пунктирных линиях, соответствующих уравнениям $y=\pm e^{-ax}$. Это происходит вследствие указанного выше смещения вершин.

4. Построим кривую

$$y=\frac{x^3-3x}{6}.$$

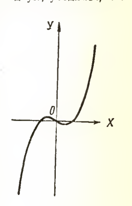
Составляем производные первого и второго порядка:

$$y'=\frac{x^2-1}{2};\quad y''=x.$$

Приравнивая первую производную нулю, получим значения $x_1=1$ и $x_2=-1$. Подставляя эти значения во вторую производную, убедимся, что первому значению будет соответствовать минимум, а второму — максимум. Подставляя эти значения в выражение для y, определим соответствующие вершины кривой:

$$\left(-1,\ \frac{1}{3}\right),\quad \left(1,\ -\frac{1}{3}\right).$$

Полагая $x=0$, получим $y=0$, т. е. начало координат (0, 0) лежит на кривой. Наконец, приравнивая y нулю, получим, кроме $x=0$, еще два значения $x=\pm\sqrt{3}$, т. е. окончательно точки пересечения кривой с осями координат будут (0, 0), $(\sqrt{3},\ 0)$ и $(-\sqrt{3},\ 0)$. Отметим еще, что при одновременной замене x и y на $(-x)$ и $(-y)$ обе части уравнения кривой меняют лишь знак, т. е. начало координат есть центр симметрии кривой (черт. 62).

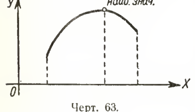


Черт. 62.

60. Наибольшее и наименьшее значения функций. Пусть рассматриваются значения функции $f(x)$ при значениях независимой переменной x из промежутка $(a,\ b)$, т. е. при $a\leqslant x\leqslant b$, и пусть требуется найти наибольшее и наименьшее из этих значений. При указанном условии функция $f(x)$ будет достигать наибольшего и наименьшего значения [35], т. е. соответствующий этой функции график будет иметь в упомянутом промежутке наибольшую и наименьшую ординаты. Согласно приведенным выше правилам, мы сможем найти все максимумы и минимумы функции, заключающиеся внутри промежутка $(a,\ b)$. Если функция $\varphi(x)$ имеет свою наибольшую ординату внутри этого промежутка, то эта наибольшая ордината будет, очевидно, совпадать с наибольшим максимумом функции внутри промежутка $(a,\ b)$. Но может оказаться, что наибольшая ордината находится не внутри промежутка, а на одном из его концов $x=a$ или $x=b$. Поэтому для нахождения, например, наибольшего значения функции недостаточно сравнить все ее максимумы внутри промежутка и взять наибольший, но необходимо также принять во внимание и значение функции на концах промежутка. Точно так же

для определения наименьшего значения функции надо взять все ее минимумы, лежащие внутри промежутка, и граничные значения функции при $x=a$ и $x=b$. Заметим при этом, что максимумы и минимумы могут вовсе отсутствовать, а наибольшее и наименьшее значения у непрерывной функции в ограниченном промежутке (a, b) обязательно будут существовать.

Отметим некоторые частные случаи, когда нахождение наименьших и наибольших значений производится наиболее просто. Если, например, функция $f(x)$ возрастает в промежутке (a, b), то, очевидно, при $x=a$ она будет принимать наименьшее, а при $x=b$ наибольшее значение. Для убывающей функции картина будет противоположной.



Черт. 63.

Если функция имеет внутри промежутка один максимум и не имеет минимумов, то этот единственный максимум и дает наибольшее значение функции (черт. 63), так что в этом случае для определения наибольшего значения функции вовсе не надо определять значений функций на концах промежутка. Точно так же, если функция имеет внутри промежутка один минимум и не имеет вовсе максимумов, то упомянутый единственный минимум и дает наименьшее значение функции. Указанные только что обстоятельства будут иметь место в первых из четырех изложенных ниже задач.

1. *Дан отрезок длины l. Требуется разделить его на две части так, чтобы площадь прямоугольника, построенного на них, была наибольшей.*

Пусть x — длина одной из частей отрезка, $(l-x)$ — длина другой его части. Принимая во внимание, что площадь прямоугольника равна произведению его соседних сторон, видим, что задача сводится к нахождению тех значений x, при которых функция

$$f(x)=x(l-x)$$

достигает наибольшего значения в промежутке $(0, l)$ изменения x.

Составим производные первого и второго порядка:

$$f'(x)=(l-x)-x=l-2x, \quad f''(x)=-2<0.$$

Приравнивая первую производную нулю, получим единственное значение $x=\frac{l}{2}$, которому и соответствует максимум, так как $f''(x)$ постоянно отрицательна. Таким образом, наибольшая площадь будет у квадрата со стороною $\frac{l}{2}$.

2. *Из круга радиуса R вырезается сектор и из оставшейся части круга склеивается конус. Требуется определить угол вырезанного сектора так, чтобы объем конуса был наибольшим.*

Примем за независимую переменную x не угол вырезанного сектора, а его дополнение до 2π, т. е. угол оставшегося сектора. При значениях x,

близких к 0 и 2π, объем конуса будет близок к нулю, и, очевидно, внутри промежутка $(0, 2\pi)$ будет существовать такое значение x, при котором этот объем будет наибольшим.

При склеивании оставшейся части круга в конус (черт. 64) получится такой конус, у которого образующая равна R, длина окружности основания равна Rx, радиус основания $r = \frac{Rx}{2\pi}$ и высота

$$h = \sqrt{R^2 - \frac{R^2x^2}{4\pi^2}} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}.$$

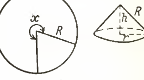
Объем этого конуса будет:

$$v(x) = \frac{1}{3}\pi\frac{R^2x^2}{4\pi^2}\cdot\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2} = \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}.$$

При отыскании наибольшего значения этой функции мы можем не обращать внимания на постоянный множитель $\frac{R^3}{24\pi^2}$. Оставшееся произведение $x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$ положительно и, следовательно, будет достигать наибольшего значения при тех же значениях x, при которых достигает наибольшего значения его квадрат. Таким образом, мы можем рассматривать функцию:

$$f(x) = 4\pi^2x^4 - x^6$$

внутри промежутка $(0, 2\pi)$.



Черт. 64.

Составляем первую производную:

$$f'(x) = 16\pi^2x^3 - 6x^5.$$

Она существует при всех значениях x. Приравнивая ее нулю, получим три значения:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad x_3 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Первые два значения *не лежат внутри* промежутка $(0, 2\pi)$. Остается единственное значение $x_3 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$, лежащее внутри этого промежутка; но выше мы видели, что наибольшее значение внутри этого промежутка должно встретиться, а следовательно, и не исследуя значения x_3, можем утверждать, что ему будет соответствовать наибольший объем конуса.

3. *Прямою L плоскость разделена на две части (среды) I и II. Точка двигается в среде I со скоростью v_1, в среде II — со скоростью v_2. По какому пути должна двигаться точка, чтобы возможно скорее попасть из точки A среды I в точку B среды II?*

Пусть AA_1 и BB_1 — перпендикуляры из точек A и B на прямую L. Введем следующие обозначения:

$$\overline{AA_1} = a, \quad \overline{BB_1} = b, \quad \overline{A_1B_1} = c,$$

и на прямой L будем отсчитывать абсциссы в направлении $\overline{A_1B_1}$ (черт. 65).

Ясно, что как в среде I, так и в среде II путь точки должен быть прямолинейным, но путь по прямой AB не будет, вообще говоря, „скорейшим путем". Итак, „скорейший путь" будет состоять из двух прямолинейных

отрезков $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$, причем точка M должна лежать на прямой L. За независимую переменную x выберем абсциссу точки M: $x = \overline{A_1M}$. Время t, наименьшее значение которого ищется, определится по формуле:

$$t = f(x) = \frac{AM}{v_1} + \frac{MB}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2}$$

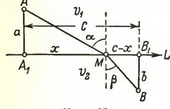
в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Составим производные первого и второго порядков:

$$f'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{v_2\sqrt{b^2 + (c - x)^2}},$$

$$f''(x) = \frac{a^2}{v_1(a^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{v_2[b^2 + (c - x)^2]^{3/2}}.$$

Обе производные существуют при всех значениях x, и $f''(x)$ всегда имеет знак $(+)$. Следовательно, $f'(x)$ возрастает в промежутке $(-\infty, +\infty)$ и не может обратиться в нуль более одного раза. Но:



Черт. 65.

$$f'(0) = -\frac{c}{v_2\sqrt{b^2 + c^2}} < 0$$

и

$$f'(c) = \frac{c}{v_1\sqrt{a^2 + c^2}} > 0,$$

а потому уравнение

$$f'(x) = 0$$

имеет единственный корень x_0 между 0 и c, которому соответствует единственный минимум функции $f(x)$, так как $f''(x) > 0$. Абсциссы 0 и c соответствуют точкам A_1 и B_1, а потому искомая точка M будет находиться между точками A_1 и B_1, что можно было бы показать и из элементарных геометрических соображений.

Поясним геометрический смысл полученного решения. Обозначим через α и β углы, составленные отрезками $\overline{AM}$ и $\overline{BM}$ с перпендикуляром, восставленным из точки M к L. Абсцисса x искомой точки M должна сбращать в нуль $f'(x)$, т. е. должна удовлетворять уравнению:

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{v_2\sqrt{b^2 + (c - x)^2}},$$

которое можно переписать так:

$$\frac{A_1M}{v_1 \cdot AM} = \frac{MB_1}{v_2 \cdot BM}$$

или

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2};$$

„скорейший путь“ будет тот, при котором отношение синусов углов α и β будет равно отношению скоростей в средах I и II. Результат этот дает нам известный закон преломления света, и, следовательно, преломление света совершается так, как будто луч света выбирает „скорейший путь“ из точек одной среды в точки другой.

4. Положим, что экспериментально определяется величина x, и n одинаково тщательно произведенных наблюдений дают для нее n значений

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

неодинаковых ввиду неточности инструментов. „Наиболее вероятным“ значением величины x будем считать то, при котором сумма квадратов ошибок будет наименьшей. Таким образом, нахождение этого значения приводится к нахождению x из условия наименьшего значения функции

$$f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$$

в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Составляем производные первого и второго порядков:

$$f'(x) = 2(x - a_1) + 2(x - a_2) + \ldots + 2(x - a_n),$$
$$f''(x) = 2 + 2 + \ldots + 2 = 2n > 0.$$

Приравнивая первую производную нулю, получим единственное значение

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

которому будет соответствовать минимум ввиду положительности второй производной. Таким образом *„наиболее вероятным“ значением x является среднее арифметическое значений, полученных из наблюдений.*

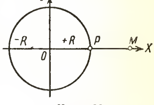
5. *Найти кратчайшее расстояние точки M до окружности.*

Примем за начало координат центр окружности O, за ось OX — прямую OM. Пусть $OM = a$ и пусть R есть радиус окружности. Уравнение окружности будет:

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

а расстояние точки M с координатами $(a, 0)$ до любой точки окружности:

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2}.$$



Черт. 66.

Будем искать наименьшее значение квадрата этого расстояния. Подставив вместо y^2 его выражение $R^2 - x^2$ из уравнения окружности, мы получим функцию:

$$f(x) = (x - a)^2 + (R^2 - x^2) = -2ax + a^2 + R^2,$$

где независимая переменная x может изменяться в промежутке $(-R \leqslant x \leqslant R)$.

Так как первая производная:

$$f'(x) = -2a$$

отрицательна при всех значениях x, то функция $f(x)$ убывает и достигает, следовательно, наименьшего значения при $x = R$ на правом конце промежутка. Кратчайшим расстоянием будет длина отрезка $\overline{PM}$ (черт. 66).

6. *В данный прямой круговой конус вписать цилиндр так, чтобы его полная поверхность была наибольшей.*

Обозначим радиус основания и высоту конуса буквами R и H, а радиус основания и высоту цилиндра — буквами r и h. Функция, наибольшее значение которой ищется, будет в данном случае:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Переменные величины r и h связаны между собой тем условием, что цилиндр вписан в данный конус. Из подобия треугольников ABD и AMN имеем (черт. 67):

$$\frac{MN}{AN}=\frac{BD}{AD},$$

или

$$\frac{h}{R-r}=\frac{H}{R},$$

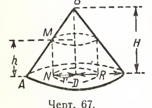
откуда

$$h=\frac{R-r}{R}H.$$

Подставляя это значение h в выражение для S, получим:

$$S=2\pi\left[r^2+rH\left(1-\frac{r}{R}\right)\right].$$

Таким образом, S оказывается функцией одной независимой переменной r, которая может изменяться в промежутке $0\leqslant r\leqslant R$. Составим производные первых двух порядков:



Черт. 67.

$$\frac{dS}{dr}=2\pi\left(2r+H-\frac{2r}{R}H\right),\quad \frac{d^2S}{dr^2}=4\pi\left(1-\frac{H}{R}\right).$$

Приравнивая нулю $\frac{dS}{dr}$, получим для r одно значение:

$$r=\frac{HR}{2(H-R)}. \tag{2}$$

Для того чтобы это значение находилось внутри промежутка $(0, R)$, необходимо выполнение неравенств:

$$0<\frac{HR}{2(H-R)} \text{ и } \frac{HR}{2(H-R)}<R. \tag{3}$$

Первое из этих неравенств равносильно тому, что H должно быть больше R. Умножая обе части второго неравенства на положительную величину $2(H-R)$, получим:

$$R<\frac{H}{2}.$$

При выполнении этого условия $\frac{d^2S}{dr^2}$ имеет знак (—); значению (2) соответствуют единственный максимум функции S и наибольшая величина поверхности цилиндра. Эту величину можно легко определить, подставляя значение r из (2) в выражение для S.

Предположим теперь, что значение (2) не лежит внутри промежутка $(0, R)$, т. е. что не выполнено одно из неравенств (3). При этом могут представиться две возможности: или $H\leqslant R$ или $H>R$, но $R\geqslant\frac{H}{2}$. Обе они могут быть охарактеризованы одним неравенством:

$$H\leqslant 2R. \tag{4}$$

Преобразуем выражение для $\frac{dS}{dr}$:

$$\frac{dS}{dr}=2\pi\left(2r+H-\frac{2r}{R}H\right)=\frac{2\pi}{R}[(2R-H)r+H(R-r)].$$

Из этого выражения видно, что при выполнении условия (4) $\frac{dS}{dr}>0$ при $0<r<R$, т. е. функция S возрастает в промежутке $(0, R)$, а потому достигает наибольшего значения при $r=R$. При этом значении r, очевидно, $h=0$, и полученное решение можно рассматривать как сплющенный цилиндр, основание которого совпадает с основанием конуса и вся поверхность которого приводится к $2\pi R^2$.

61. Теорема Ферма. Выше мы изложили, пользуясь элементарными геометрическими соображениями, способы исследования возрастания и убывания функций, нахождения их максимумов и минимумов, а также наибольших и наименьших значений. Сейчас мы переходим к строгому аналитическому изложению некоторых теорем и формул, которые дадут нам аналитическое доказательство справедливости приведенных выше правил, а также позволят продвинуть исследование функций еще несколько дальше. В дальнейшем изложении мы будем уже вполне отчетливо и подробно перечислять все условия, при которых соответствующие теоремы и формулы имеют место.

Теорема Ферма. *Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b), в каждой точке внутри этого промежутка имеет производную и в некоторой точке $x=c$ внутри промежутка достигает наибольшего (или наименьшего) значения, то в этой точке $x=c$ первая производная равна нулю, т. е. $f'(c)=0$.*

Итак, положим для определенности, что значение $f(c)$ является наибольшим значением функции. Для того случая, когда это есть наименьшее значение, доказательство может быть проведено совершенно аналогичным образом. Итак, согласно условию, точка $x=c$ лежит внутри промежутка и разность $f(c+h)-f(c)$ будет отрицательной или, во всяком случае, не положительной, при любом h как положительном, так и отрицательном:

$$f(c+h)-f(c)\leqslant 0.$$

Составим отношение:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

Числитель написанной дроби, как сказано, меньше или равен нулю, а потому:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leqslant 0 \quad \text{при} \quad h>0,\\ &\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geqslant 0 \quad \text{при} \quad h<0.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Точка $x = c$ лежит внутри промежутка, и в ней по условию существует производная, т. е. написанная выше дробь стремится к определенному пределу $f'(c)$, если h стремится к нулю любым образом. Положим сначала, что h стремится к нулю со стороны положительных значений. При этом, переходя к пределу в первом из неравенств (5), получим

$$f'(c) \leqslant 0.$$

Точно так же переход к пределу при $h \to 0$ во втором неравенстве (5) дает

$$f'(c) \geqslant 0.$$

Сопоставляя эти неравенства, мы получим требуемый результат:

$$f'(c) = 0.$$

62. Теорема Ролля. *Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b), имеет производную в каждой точке внутри этого промежутка и значения функции на концах этого промежутка равны,* т. е. $f(a) = f(b)$, *то внутри промежутка существует, по крайней мере, одно такое значение $x = c$, при котором производная обращается в нуль,* т. е. $f'(c) = 0$.

Непрерывная функция $f(x)$ должна достигать в рассматриваемом промежутке наименьшего значения m и наибольшего значения M. Если бы оказалось, что эти наименьшее и наибольшее значения одинаковы, т. е. $m = M$, то отсюда следовало бы, очевидно, что функция во всем промежутке сохраняет постоянное значение, равное m (или M). Но, как известно, производная от постоянной равна нулю, и, следовательно, в этом простом случае во всякой точке внутри промежутка производная была бы равна нулю. Обращаясь к рассмотрению общего случая, мы можем, следовательно, считать, что $m < M$. Так как значения функции на концах по условию одинаковы, т. е. $f(a) = f(b)$, то, по крайней мере, одно из чисел m или M отлично от этого общего значения на концах. Положим, например, что это будет M, т. е. что наибольшее значение функции достигается не на концах, а внутри промежутка. Пусть $x = c$ будет та точка, где это значение достигается. Согласно теореме Ферма, мы будем иметь в этой точке $f'(c) = 0$, что и доказывает теорему Ролля.

В частном случае, если $f(a) = f(b) = 0$, можно теорему Ролля формулировать кратко так: *между двумя корнями функции заключается, по крайней мере, один корень первой производной.*

Теорема Ролля имеет простое геометрическое значение. По условию, $f(a) = f(b)$, т. е. ординаты кривой $y = f(x)$, соответствующие концам промежутка, равны, и внутри этого промежутка существует производная, т. е. кривая имеет определенную касательную. Теорема Ролля утверждает, что при этом внутри промежутка будет

существовать, по крайней мере, одна такая точка, в которой производная будет равна нулю, т. е. в которой касательная будет параллельна оси OX (черт. 68).

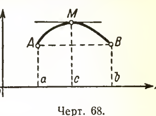
Замечание. Если не выполнено условие теоремы Ролля о существовании производной $f'(x)$ во всех точках внутри промежутка, то теорема может оказаться и неверной.

Так, например, функция

$$f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$$

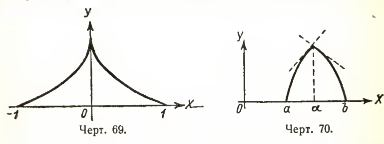
непрерывна в промежутке $(-1, +1)$ и $f(-1)=f(1)=0$, но производная

$$f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$



Черт. 68.

внутри промежутка в нуль не обращается. Происходит это оттого, что $f'(x)$ не существует (обращается в бесконечность) при $x=0$ (черт. 69). Другой пример дает кривая, изображенная на черт. 70. В этом случае мы имеем кривую $y=f(x)$, у которой $f(a)=f(b)=0$. Однако из чертежа видно, что касательная внутри промежутка (a, b) не может быть параллельна оси OX,



Черт. 69. Черт. 70.

т. е. $f'(x)$ не обращается в нуль. Происходит это оттого, что кривая в точке $x=\alpha$ имеет две различные касательные, справа и слева от этой точки, и, следовательно, в этой точке не существует определенной производной, и условие теоремы Ролля о существовании производной во всех точках внутри промежутка не выполнено.

63. Формула Лагранжа. Положим, что функция $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b) и имеет внутри этого промежутка производную, но условие $f(a)=f(b)$ теоремы Ролля может быть не выполнено. Составим функцию

$$F(x)=f(x)+\lambda x,$$

где λ — постоянная, которую мы определим так, чтобы новая функция $F(x)$ удовлетворяла упомянутому условию теоремы Ролля, т. е. потребуем, чтобы

$$F(a)=F(b)$$

или

$$f(a)+\lambda a=f(b)+\lambda b,$$

откуда

$$\lambda=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Применяя теперь к $F(x)$ теорему Ролля, можем утверждать, что между a и b будет находиться такое значение $x=c$, при котором

$$F'(c)=f'(c)+\lambda=0 \qquad (a<c<b),$$

откуда, подставляя найденное выше значение λ,

$$f'(c)=-\lambda \quad \text{или} \quad f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Последнее равенство можно переписать так:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

Равенство это называется *формулой Лагранжа*. Значение c заключается между a и b, а потому отношение $\frac{c-a}{b-a}=\theta$ заключается между нулем и единицей, и мы можем написать:

$$c=a+\theta(b-a) \qquad (0<\theta<1),$$

и формула Лагранжа перепишется в виде:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a+\theta(b-a)) \qquad (0<\theta<1).$$

Полагая $b=a+h$, получим еще следующий вид формулы:

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h).$$

Формула Лагранжа дает точное выражение для приращения $f(b)-f(a)$ функции $f(x)$, а потому называется также *формулой конечных приращений*.

Мы знаем, что производная постоянной равна нулю. Из формулы Лагранжа мы можем вывести обратное предложение: *если производная $f'(x)$ во всех точках промежутка* (a, b) *равна нулю, то функция $f(x)$ постоянна в этом промежутке.*

В самом деле, возьмем произвольное значение x из промежутка (a, b) и, применяя формулу Лагранжа к промежутку (a, x), получим:

$$f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi) \qquad (a<\xi<x);$$

но по условию $f'(\xi)=0$ и, следовательно:

$$f(x)-f(a)=0, \quad \text{т. е.} \quad f(x)=f(a)=\text{постоянной}.$$

Относительно величины c, входящей в формулу Лагранжа, мы знаем только то, что она заключается между a и b, и поэтому формула Лагранжа не дает возможности точного вычисления приращения

функции через производную, но с ее помощью можно произвести оценку той ошибки, которую мы делаем, заменяя приращение функции ее дифференциалом.

Пример. Пусть

$$f(x)=\log_{10} x.$$

Производиая будет:

$$f'(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\log 10}=\frac{M}{x} \quad (M=0{,}43429\ldots),$$

и формула Лаграижа даст иам:

$$\log_{10}(a+h)-\log_{10} a=h\frac{M}{a+\theta h} \qquad (0<\theta<1)$$

или

$$\log_{10}(a+h)=\log_{10} a+h\frac{M}{a+\theta h}.$$

Замеияя приращеиие диффереициалом, получим приближеииую формулу

$$\log_{10}(a+h)-\log_{10} a=h\frac{M}{a}, \qquad \log_{10}(a+h)=\log_{10} a+h\frac{M}{a}.$$

Сравнивая это приближеиное равенство с точным, получеиным по формуле Лаграижа, увидим, что ошибка будет:

$$h\frac{M}{a}-h\frac{M}{a+\theta h}=\frac{\theta h^2 M}{a(a+\theta h)}.$$

Полагая $a=100$ и $h=1$, получим приближеииое равенство

$$\log_{10} 101=\log_{10} 100+\frac{M}{100}=2{,}00434\ldots$$

с ошибкой

$$\frac{\theta\cdot M}{100(100+\theta)} \qquad (0<\theta<1).$$

Замеияя в числителе этой дроби θ едииицей, а в зиамеиателе иулем, увеличим дробь и можем поэтому сказать, что ошибка вычислеииого зиачеиия $\log_{10} 101$ меиьше

$$\frac{M}{100^2}=0{,}00004\ldots$$

Перепишем формулу Лагранжа в виде:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (a<c<b).$$

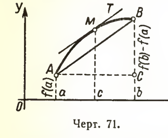
Обращаясь к графику функции $y=f'(x)$ (черт. 71), заметим, что отношение:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\operatorname{tg}\angle CAB$$

дает угловой коэффициент хорды AB, а $f'(c)$ дает угловой коэффициент касательной в некоторой точке M дуги AB кривой. Таким образом, формула Лагранжа равносильна следующему утверждению:

на дуге кривой имеется такая точка, в которой касательная параллельна хорде. Частным случаем этого утверждения, когда хорда параллельна оси OX, т. е. $f(a)=f(b)$, является теорема Ролля.

Замечание. Из формулы Лагранжа непосредственно вытекают те признаки возрастания и убывания, которые были установлены нами выше из чертежа. Действительно, положим, что внутри некоторого промежутка первая производная $f'(x)$ положительна и пусть x и $x+h$ — две точки из этого промежутка. Из формулы Лагранжа:



Черт. 71.

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h) \quad (0<\theta<1)$$

видно, что при положительных h разность, стоящая слева, будет величиной положительной, так как оба множителя в произведении, стоящем справа, в этом случае положительны. Таким образом, предполагая положительность производной в некотором промежутке, мы получили:

$$f(x+h)-f(x)>0,$$

т. е. функция возрастает в этом промежутке. Точно так же из написанной выше формулы непосредственно вытекает и признак убывания.

Заметим здесь же, что рассуждения, приведенные нами при доказательстве теоремы Ферма, остаются вполне применимыми и для того случая, когда в рассматриваемой точке функция достигает не обязательно наибольшего или наименьшего значения, а только лишь максимума или минимума. Эти рассуждения докажут нам, что в таких точках первая производная должна быть равна нулю, если она существует.

64. Формула Коши. Положим, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в промежутке (a, b) и в каждой точке внутри этого промежутка имеют производную, причем производная $\varphi'(x)$ ни в одной из точек внутри промежутка не обращается в нуль. Применяя к функции $\varphi(x)$ формулу Лагранжа, получим:

$$\varphi(b)-\varphi(a)=(b-a)\varphi'(c_1) \qquad (a<c_1<b);$$

но по условию $\varphi'(c_1)\neq 0$ и, следовательно:

$$\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0.$$

Составим функцию:

$$F(x)=f(x)+\lambda\varphi(x),$$

где λ — постоянная, которую мы определим так, чтобы было:

$$F(a)=F(b), \quad \text{т. е.} \quad f(a)+\lambda\varphi(a)=f(b)+\lambda\varphi(b),$$

откуда

$$\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}.$$

При таком выборе λ к функции $F(x)$ приложима теорема Ролля, и, следовательно, будет существовать такое значение $x=c$, при котором:

$$F'(c)=f'(c)+\lambda\varphi'(c)=0 \qquad (a<c<b).$$

Это уравнение дает:

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=-\lambda \qquad (\varphi'(c)\neq 0),$$

откуда, подставляя найденное для λ значение, получим:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \qquad (a<c<b)$$

или

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'[a+\theta(b-a)]}{\varphi'[a+\theta(b-a)]} \qquad (0<\theta<1), \tag{6}$$

или

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)}.$$

Это и есть формула Коши. Полагая в этой формуле $\varphi(x)=x$, будем иметь $\varphi'(x)=1$, и формула примет вид:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c),$$

т. е. мы получили формулу Лагранжа как частный случай формулы Коши.

65. Раскрытие неопределенностей. Положим, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны при $a<x\leqslant a+k$, где k — некоторое положительное число, имеют непрерывные производные и $\psi'(x)$ не обращается в нуль при указанных значениях x. Положим, кроме того, что $\lim\varphi(x)=0$ и $\lim\psi(x)=0$ при $x\to a+0$ [26]. Полагая $\varphi(a)=\psi(a)=0$, мы получим функции, непрерывные вплоть до $x=a$, т. е. при $a\leqslant x\leqslant a+k$. При $x\to a+0$ к частному $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, которое при $x=a$ представляет собою неопределенность вида $\frac{0}{0}$, не применима теорема о пределе частного. Укажем способ раскрытия такой неопределенности, т. е. способ нахождения предела $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ при $x\to a+0$.

Докажем предварительно следующую теорему: *если при сделанных выше предположениях отношение $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ стремится к пределу b при стремлении x к a, то к тому же пределу стремится и отношение функций $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.*

Принимая во внимание, что

$$\psi(a)=\varphi(a)=0,$$

и применяя формулу Коши [64], получим:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \quad (\xi \text{ между } a \text{ и } x). \tag{7}$$

Заметим, что при сделанных относительно $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ предположениях мы имеем право применять формулу Коши.

Если x стремится к a, то к тому же пределу будет стремиться и ξ, заключающееся между x и a. При этом, по условию теоремы, правая часть равенства (7) стремится к b, а следовательно, к тому же пределу будет стремиться и отношение $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, стоящее в левой части этого равенства. Таким образом, приходим к правилу:

При разыскании предела частного $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, *в случае неопределенности вида* $\frac{0}{0}$, *можно заменить отношение функций отношением их производных и отыскивать предел этого нового отношения.*

Правило это дано французским математиком Лопиталем и называется обычно его именем.

Если отношение производных тоже приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, то и к нему можно применить это правило, и т. д.

Мы рассмотрели случай $a<x\leqslant a+k$. Совершенно аналогично рассматривается случай $a-k\leqslant x<a\,(x\to a-0)$. В дальнейших примерах предел не зависит от того, стремится ли x к a справа или слева, т. е. $x\to a$ [27].

Приложим правило Лопиталя к нескольким примерам:

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{n(1+x)^{n-1}}{1}=n;$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6},$$

т. е. разность $x-\sin x$ есть бесконечно малая третьего порядка по сравнению с x.

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x\sin x}{1-\cos x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x+\cos x-x\sin x}{\cos x}=3.$$

Результат этого примера приводит к практически удобному способу *спрямления дуги окружности.*

Рассмотрим окружность, радиус которой примем за единицу. За ось OX выберем один из диаметров этой окружности, а за ось OY — касательную в конце этого диаметра (черт. 72).

Возьмем некоторую дугу OM и пусть на оси OY имеется отрезок ON, равный дуге OM, и проведем прямую NM. Пусть P — точка ее пересечения с осью OX.

Обозначим через u длину дуги OM (радиус принят за единицу). Уравнение прямой NM в отрезках имеет вид:

$$\frac{x}{OP}+\frac{y}{u}=1.$$

Для вычисления длины отрезка $\overline{OP}$ заметим, что на прямой NM лежит точка M с координатами

$$x=OQ=1-\cos u, \quad y=QM=\sin u.$$

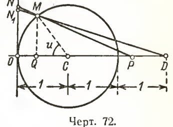
Эти координаты должны удовлетворять написанному уравнению:

$$\frac{1-\cos u}{OP}+\frac{\sin u}{u}=1,$$

откуда

$$OP=\frac{u-u\cos u}{u-\sin u}.$$

Результат примера 3 показывает, что, при $u\to 0$, $OP\to 3$, т. е. точка P на оси OX будет стремиться к точке D, расстояние которой от начала координат равно утроенному радиусу окружности. Отсюда получается простой способ приближенного спрямления дуги окружности. Для спрямления дуги OM надо отложить от точки O отрезок $\overline{OD}$, равный трем радиусам окружности, и провести прямую DM. Отрезок $\overline{ON_1}$, отсекаемый этой прямой на оси OY, и даст приближенно длину дуги OM. Способ этот приводит к очень хорошим результатам, особенно для небольших дуг; но даже для дуги $\frac{\pi}{2}$ относительная ошибка составляет приблизительно 5%.



Черт. 72.

66. Различные виды неопределенностей. Доказанная в [65] теорема справедлива и для случая неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$. Пусть:

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\lim_{x\to a}\psi(x)=\infty \tag{8}$$

и

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=b. \tag{9}$$

Покажем, что отношение $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ стремится к тому же пределу b, причем положим, что $\psi'(x)$ не обращается в нуль при значениях x, близких к a.

Рассмотрим два значения независимой переменной x и x_0, близкие к a и такие, что x заключается между x_0 и a. По формуле Коши будем иметь:

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \qquad (\xi \text{ между } x \text{ и } x_0),$$

но, с другой стороны:

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{1-\frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1-\frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}.$$

Отметим, что из (8) непосредственно следует, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ отличны от нуля при значениях x, близких к a.

Сравнивая эти два выражения, получим:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{1-\frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1-\frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$$

или

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}\cdot\frac{1-\frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}{1-\frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}, \tag{10}$$

где ξ заключается между x и x_0 и, следовательно, между a и x_0. Возьмем x_0 достаточно близким к a; тогда, в силу условия (9), мы можем считать, что первый множитель в правой части равенства (10) будет сколь угодно мало отличаться от b при любом выборе x между x_0 и a. Закрепив, таким образом, значение x_0, будем приближать x к a. Тогда в силу условия (8) второй множитель в правой части равенства (10) будет стремиться к единице, а потому мы можем утверждать, что отношение $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, стоящее в левой части равенства (10), при значениях x, близких к a, будет сколь угодно мало отличаться от b, т. е.

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=b.$$

Из доказанной теоремы следует, что правило Лопиталя применимо и для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Отметим еще некоторые виды неопределенностей. Рассмотрим произведение $\varphi(x)\psi(x)$, и пусть

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a}\psi(x)=\infty.$$

Это будет неопределенность вида $0\cdot\infty$. Нетрудно привести ее к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\varphi(x)\psi(x)=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}=\frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}.$$

Рассмотрим, наконец, выражение $\varphi(x)^{\psi(x)}$ и пусть

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a}\psi(x)=\infty,$$

Это будет случай неопределенности вида 1^∞. Рассмотрим логарифм данного выражения:

$$\log[\varphi(x)^{\psi(x)}] = \psi(x)\log\varphi(x),$$

который приводится к неопределенности вида $0\cdot\infty$. Раскрывая эту неопределенность, т. е. находя предел логарифма данного выражения, мы тем самым будем знать и предел самого выражения. Совершенно так же раскрываются неопределенности вида ∞^0 и 0^0.

Рассмотрим теперь примеры:

1.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty.$$

Совершенно так же можно убедиться в том, что отношение $\frac{e^x}{x^n}$ при любом положительном значении n стремится к бесконечности, когда $x\to+\infty$, т. е. *показательная функция e^x возрастает быстрее любой положительной степени x* при беспредельном возрастании x.

2.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n} = 0 \qquad (n>0),$$

т. е. $\log x$ *возрастает медленнее любой положительной степени x.*

3.
$$\lim_{x\to+0} x^n\log x = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-n}{x^{n+1}}} =$$

$$= -\lim_{x\to+0}\frac{x^n}{n} = 0 \qquad (n>0).$$

4. Найдем предел x^x при стремлении x к $(+0)$. Логарифмируя это выражение, получим неопределенность вида $0\cdot\infty$. Эта неопределенность в силу примера 3 даст в пределе нуль, а следовательно:

$$\lim_{x\to+0} x^x = 1.$$

5. Найдем предел отношения

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}.$$

Числитель и знаменатель написанного отношения стремятся к бесконечности. Заменяя по правилу Лопиталя отношение функций отношением производных, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1},$$

Но $1+\cos x$ при беспредельном возрастании x ни к какому пределу не стремится, ибо $\cos x$ будет все время колебаться между $(+1)$ и (-1); однако нетрудно видеть, что само данное отношение стремится к пределу:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

Итак, в этом случае неопределенность раскрывается, но правило Лопиталя ничего не дает. Этот результат не противоречит доказанной теореме, ибо в теореме утверждалось лишь то, что если отношение производных стремится к пределу, то к тому же пределу стремится и отношение функций, но не наоборот.

6. Отметим еще неопределенность вида $(\infty\pm\infty)$. Она приводится обычно к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Например:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x+x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{(x+x^2)\sin x}.$$

Последнее выражение представляет собою неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Раскрывая ее указанным выше способом, получим:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x+x^2}\right)=1.$$

§ 6. ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

67. Основные понятия. До сих пор мы рассматривали функцию одной независимой переменной. Рассмотрим теперь функцию двух независимых переменных

$$u=f(x,\ y).$$

Для определения частных значений такой функции должны быть заданы значения независимых переменных: $x=x_0$, $y=y_0$. Каждой такой паре значений x и y соответствует определенная точка M_0 на координатной плоскости с координатами $(x_0,\ y_0)$, и вместо того, чтобы говорить о значении функции при $x=x_0$, $y=y_0$, можно говорить о значении функции в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ плоскости. Функция может быть определена *на всей плоскости* или только в некоторой ее части, *в некоторой области*. Если $f(x,\ y)$ есть целый многочлен от x, y, например:

$$u=f(x,\ y)=x^2+xy+y^2-2x+3y+7,$$

то можно считать, что эта формула определяет функцию на всей плоскости. Формула:

$$u=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$$

определяет функцию внутри окружности $x^2+y^2=1$ с центром в начале координат и радиусом единица и на самой окружности, где $u=0$. Аналогом промежутка на плоскости является область,

определяемая неравенствами $a_1 \leqslant x \leqslant b_1$; $a_2 \leqslant y \leqslant b_2$. Это — прямоугольник со сторонами, параллельными осям, причем граница этого прямоугольника также включается в область. Неравенства $a_1 < x < b_1$, $a_2 < y < b_2$ определяют только внутренние точки прямоугольника. Если граница области причисляется к ней, то область называется *замкнутой*. Если граница не причисляется к области, то область называется *открытой* [ср. 4]. Определим понятие предела для функции двух переменных [ср. 32]. Положим, что функция определена во всех точках $M(x, y)$, достаточно близких к точке $M_0(a, b)$. Дадим определение предела функции $f(x, y)$ при стремлении $M(x, y)$ к $M_0(a, b)$.

Определение. *Говорят, что число A есть предел $f(x)$ при стремлении $M(x, y)$ к $M_0(a, b)$ и пишут*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A \quad \text{или} \quad \lim_{M \to M_0} f(x, y) = A,$$

если для любого заданного положительного числа ε существует такое положительное число η, что

$$|A - f(x, y)| < \varepsilon, \text{ если } |x - a| < \eta \text{ и } |y - b| < \eta.$$

При этом предполагается, что исключена пара значений $x = a$, $y = b$ (M не совпадает с M_0). Если точка M_0 лежит на границе той области, в которой определена $f(x, y)$, то M, стремящаяся к M_0, должна принадлежать области, в которой определена функция $f(x, y)$. Пусть имеется какая-либо пронумерованная последовательность точек $M_n(x_n, y_n)$, стремящаяся к $M_0(a, b)$, т. е. такая, что последовательность x_n имеет предел a, а последовательность y_n — предел b. Можно доказать, что если последовательность чисел $u_n = f(x_n, y_n)$ для любой такой последовательности точек $M_n(x_n, y_n)$ имеет один и тот же предел A, то A есть предел $f(x, y)$ при стремлении $M(x, y)$ к $M_0(a, b)$ в смысле сформулированного выше определения.

Положим, что $f(x, y)$ определена в точках $M_0(a, b)$ и во всех точках, достаточно близких к $M_0(a, b)$ [ср. 32].

Определение. ***Функция** $f(x, y)$ **называется непрерывной** в точке $M_0(a, b)$, если*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b) \quad \text{или} \quad \lim_{M \to M_0} f(x, y) = f(a, b).$$

Функция называется непрерывной в некоторой области, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Так, например, функция $w = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ непрерывна внутри круга, в котором она определена. Про нее можно также сказать, что она остается непрерывной, если мы к кругу присоединим и его границу, т. е. окружность, на которой $w = 0$.

Функция $f(x, y)$, непрерывная в некоторой области, включая и ее границу, обладает следующими двумя свойствами, аналогичными свойствам функции одной независимой переменной, непрерывной в некотором промежутке [**35**]:

1) по крайней мере, в одной точке области или на границе она принимает наибольшее (наименьшее) значение по сравнению с остальными своими значениями в указанной области, включая и границу;

2) она равномерно непрерывна в области (включая границу), т. е. при любом заданном положительном числе ε существует одно для всей области положительное число η такое, что

$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |x_2 - x_1| \quad \text{и} \quad |y_2 - y_1| < \eta,$$

[(x_1, y_1) и (x_2, y_2) — точки, принадлежащие области].

Обратим внимание на одно следствие, которое вытекает из определений непрерывности функций. Если $f(x, y)$ непрерывна в точке (a, b) и если мы положим $y = b$, то функция $f(x, b)$ одной переменной x непрерывна при $x = a$. Аналогично, $f(a, y)$ непрерывна при $y = b$.

68. Частные производные и полный дифференциал функции двух независимых переменных. Допустим, что у функции $u = f(x, y)$ переменная y сохраняет постоянное значение и меняется только x: u становится функцией одного x и можно вычислить ее приращение и производную. Обозначим через $\Delta_x u$ приращение u, которое эта функция получает, когда y остается постоянным, а x получает приращение Δx:

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Производную получим, найдя предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Производная эта, вычисленная в предположении, что y остается постоянным, называется *частной производной функции u по x* и обозначается так:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \text{или} \quad f'_x(x, y) \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Заметим, что $\frac{\partial u}{\partial x}$ нельзя толковать как дробь, но лишь как символ для обозначения частной производной. Если $f(x, y)$ имеет частную производную по x, то она является непрерывной функцией x при фиксированном y.

Точно так же определяется приращение $\Delta_y u$ и частная производная от u по y, вычисленная в предложении, что x не меняется:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad \text{или} \quad f'_y(x, y) \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Если, например,

$$u = x^2 + y^2, \quad \text{то} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y.$$

Рассмотрим уравнение Клапейрона

$$pv = RT.$$

С помощью этого уравнения одна из величин p, v и T может быть определена в зависимости от двух других, причем эти последние должны уже считаться независимыми переменными. Мы получим следующую таблицу:

Независимые переменные	T, p	T, v	p, v
Функции	$v = \frac{RT}{p}$	$p = \frac{RT}{v}$	$T = \frac{pv}{R}$
Частные производные	$\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{R}{p}$; $\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{RT}{p^2}$	$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v}$; $\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{RT}{v^2}$	$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{v}{R}$; $\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{p}{R}$

Отсюда получается следующее соотношение:

$$\frac{\partial v}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial v} = -1.$$

Если бы в левой части равенства мы произвели сокращение, то получили бы не (-1), а $(+1)$. Но в этом равенстве частные производные вычислены при различных предположениях: $\frac{\partial v}{\partial T}$ — в предложении, что p постоянно; $\frac{\partial T}{\partial p}$ — при v постоянном; $\frac{\partial p}{\partial v}$ — при T постоянном, а потому упомянутое сокращение недопустимо.

Обозначим через Δu полное приращение функции, получаемое при одновременном изменении как x, так и y:

$$\Delta u = f(x + \Delta x, \ y + \Delta y) - f(x, \ y).$$

Прибавляя и вычитая $f(x, \ y + \Delta y)$, можем написать:

$$\Delta u = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

В первой квадратной скобке мы имеем приращение функции u при неизменном значении $(y + \Delta y)$ переменной y, во второй квадратной скобке — приращение той же функции при неизменном значении x. Считая, что $f(x, \ y)$ имеет в некоторой области, содер-

жащей точку (x, y) внутри себя, частные производные и применяя к каждому из этих приращений формулу Лагранжа, что мы можем сделать, так как в каждом случае меняется только одна независимая переменная, получим:

$$\Delta u = f'_x(x + \theta\Delta x,\ y + \Delta y)\,\Delta x + f'_y(x,\ y + \theta_1\Delta y)\,\Delta y,$$

где θ и θ_1 заключаются между нулем и единицей. Предполагая непрерывность частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, мы можем утверждать, что при стремлении Δx и Δy к нулю, коэффициент при Δx будет стремиться к $f'_x(x, y)$, а коэффициент при Δy — к $f'_y(x, y)$, а потому имеем:

$$\Delta u = [f'_x(x,\ y) + \varepsilon]\,\Delta x + [f'_y(x,\ y) + \varepsilon_1]\,\Delta y$$

или

$$\Delta u = f'_x(x,\ y)\,\Delta x + f'_y(x,\ y)\,\Delta y + \varepsilon\Delta x + \varepsilon_1\Delta y, \tag{1}$$

где ε и ε_1 — величины бесконечно малые одновременно с Δx и Δy. Формула эта аналогична формуле

$$\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon\Delta x,$$

доказанной нами в случае функции одной независимой переменной [**50**]. Произведения $\varepsilon\Delta x$ и $\varepsilon_1\Delta y$ будут бесконечно малыми высших порядков по сравнению соответственно с Δx и Δy.

Напомним, что в предыдущих рассуждениях мы исходили из предположения не только существования, но и непрерывности частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ в некоторой области, содержащей точку (x, y) внутри себя.

Сумма первых двух слагаемых в правой части равенства (1) называется *полным дифференциалом du функции u*. Произвольные приращения Δx и Δy независимых переменных, как и в случае одной независимой переменной, совпадают с их дифференциалами dx и dy, так что

$$du = f'_x(x,\ y)\,dx + f'_y(x,\ y)\,dy,$$

или

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy. \tag{2}$$

Ввиду вышеуказанного свойства произведений $\varepsilon\Delta x$ и $\varepsilon_1\Delta y$ можем сказать, что при малых значениях Δx и Δy *полный дифференциал du дает приближенную величину полного приращения этой функции Δu.*

С другой стороны, очевидно, что произведения $\frac{\partial u}{\partial x}dx$ и $\frac{\partial u}{\partial y}dy$ дают приближенную величину приращений $\Delta_x u$ и $\Delta_y u$, и, таким образом, *при малых приращениях независимых переменных полное приращение функции приближенно равно сумме ее частных приращений*

$$\Delta u \sim du \sim \Delta_x u + \Delta_y u.$$

Равенство (2) выражает весьма важное свойство функций от нескольких независимых переменных, которое можно назвать „свойством наложимости малых действий". Сущность его заключается в том, что соединенный эффект от нескольких малых действий Δx и Δy с достаточной точностью может быть заменен суммой эффектов от каждого малого действия в отдельности.

69. Производные сложных и неявных функций. Положим теперь что функция $u = f(x, y)$ зависит через посредство x и y от одной независимой переменной t, т. е. допустим, что x и y суть не независимые переменные, но функции независимой переменной t, и определим производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ от u по t.

Если независимая переменная t получит приращение Δt, то функции x и y получат соответственно приращения Δx и Δy, а u получит приращение Δu:

$$\Delta u = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y).$$

В [68] мы видели, что приращение можно написать в виде:

$$\Delta u = f'_x(x + \theta\Delta x,\ y + \Delta y)\,\Delta x + f'_y(x,\ y + \theta_1\Delta y)\,\Delta y.$$

Разделим обе части этого равенства на Δt:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = f'_x(x + \theta\Delta x,\ y + \Delta y)\,\frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x,\ y + \theta_1\Delta y)\,\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Мы предполагали, что x и y допускают производную по t, а следовательно, и подавно будут непрерывными функциями от t. Поэтому при стремлении Δt к нулю Δx и Δy также будут стремиться к нулю, и, в силу предполагаемой непрерывности $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, написанное равенство в пределе даст нам:

$$\frac{du}{dt} = f'_x(x,\ y)\,\frac{dx}{dt} + f'_y(x,\ y)\,\frac{dy}{dt}. \tag{3}$$

Равенство это выражает *правило дифференцирования сложной функции в случае функции нескольких переменных.*

Предположим, в частности, что роль независимой переменной t играет переменная x, т. е. что функция $u = f(x, y)$ зависит от неза-

висимой переменной x как непосредственно, так и через посредство переменной y, которая является функцией от x. Принимая во внимание, что $\frac{dx}{dx}=1$, получим на основании равенства (3):

$$\frac{du}{dx}=f'_x(x, y)+f'_y(x, y)\frac{dy}{dx}. \tag{4}$$

Производная $\frac{du}{dx}$ называется *полной* производной от u по x в отличие от *частной* производной $f'_x(x, y)$.

Доказанное правило дифференцирования сложных функций применяется для нахождения *производной неявной функции*. Положим, что уравнение

$$F(x, y)=0 \tag{5}$$

определяет y как неявную функцию от x, имеющую производную

$$y'=\varphi'(x).$$

Подставляя $y=\varphi(x)$ в уравнение (5), мы должны были бы получить тождество $0=0$, так как $y=\varphi(x)$ есть решение уравнения (5). Мы видим, таким образом, что постоянную нуль можно рассматривать как сложную функцию от x, которая зависит от x как непосредственно, так и через посредство $y=\varphi(x)$.

Производная по x от этой постоянной должна равняться нулю; применяя правило (4), получим:

$$F'_x(x, y)+F'_y(x, y)\,y'=0,$$

откуда

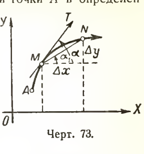
$$y'=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

В полученное таким образом выражение для y' может войти как x, так и y, и если нужно получить выражение y' только через независимую переменную x, то все-таки придется решить уравнение (5) относительно y.

§ 7. НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПОНЯТИЯ О ПРОИЗВОДНЫХ

70. Дифференциал дуги. В интегральном исчислении будет показано, каким образом находится длина дуги кривой, будет выведено выражение для дифференциала длины дуги и будет доказано, что отношение длины хорды к длине стягиваемой ею дуги стремится к единице, когда дуга беспредельно сжимается к точке.

Пусть дана некоторая кривая $y=f(x)$, и будем отсчитывать на ней длину дуги от некоторой фиксированной точки A в определенном направлении (черт. 73). Пусть s — длина дуги AM от точки A до переменной точки M. Величина s, как и ордината y, является функцией абсциссы x точки M. Если направление AM совпадает с принятым направлением кривой, то $s>0$, а в противном случае $s<0$. Пусть $M(x, y)$ и $N(x+\Delta x, y+\Delta y)$ — две точки кривой и Δs — разность длин дуг AN и AM, т. е. приращение длины дуги при переходе из M в N. Абсолютное значение Δs есть длина дуги MN, взятая со знаком плюс. Из прямоугольного треугольника имеем:



Черт. 73.

$$(\overline{MN})^2=\Delta x^2+\Delta y^2,$$

откуда

$$\frac{(\overline{MN})^2}{\Delta x^2}=1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

или

$$\left(\frac{\overline{MN}}{\Delta s}\right)^2\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2=1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Переходя к пределу и принимая во внимание, что, в силу сказанного выше, $\left(\frac{\overline{MN}}{\Delta s}\right)^2\to 1$, получим

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

или

$$\frac{ds}{dx}=\pm\sqrt{1+y'^2}. \tag{1}$$

Мы должны брать знак (+), если при возрастании x и s возрастает и знак (—), если s убывает при возрастании x. Будем для определенности считать, что имеет место первый случай (изображенный на черт. 73). Из формулы (1) следует

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

или

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}, \tag{2}$$

Естественным параметром при определении положения точки M на кривой является длина s дуги AM. Эту величину s можно принять за независимую переменную, и при этом координаты (x, y) точки M будут функциями s:

$$x = \varphi(s); \quad y = \psi(s).$$

Более подробно мы будем говорить о «параметрическом задании кривой» в [74]. Теперь мы выясним геометрический смысл производных от x и y по s.

Положим, что точка N расположена так, что направление дуги MN совпадает с принятым направлением кривой, т. е. $\Delta s > 0$. При стремлении N к M направление секущей $\overline{MN}$ в пределе дает определенное направление касательной к кривой в точке M. Это направление касательной мы назовем положительным направлением касательной. Оно связано с принятым направлением самой кривой.

Пусть α_1 — угол, образованный направлением $\overline{MN}$ с положительным направлением оси OX. Приращение Δx абсциссы x есть проекция отрезка $\overline{MN}$ на ось OX, и, следовательно:

$$\Delta x = \overline{MN} \cdot \cos \alpha_1,$$
$$(\overline{MN} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}),$$

причем в этом равенстве $\overline{MN}$ считается положительным. Деля обе части этого равенства на длину дуги MN, равную Δs, получим:

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta s} \cos \alpha_1.$$

По условию $\Delta s > 0$, а потому при стремлении N к M отношение $\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta s}$ стремится к $(+1)$, а угол α_1 стремится к углу α, образованному положительным направлением касательной $\overline{MT}$ с положительным направлением оси OX. Написанное выше равенство даст нам в пределе:

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}. \tag{3}$$

Точно так же, проектируя $\overline{MN}$ на ось OY, получим:

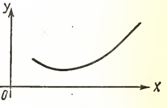
$$\sin \alpha = \frac{dy}{ds}. \tag{4}$$

71. Выпуклость, вогнутость и кривизна. Случаи выпуклости и вогнутости кривой в сторону положительных ординат представлены на черт. 74 и 75.

Одна и та же кривая $y=f(x)$ может, конечно, состоять и из выпуклых и из вогнутых частей (черт. 76). *Точки, отделяющие выпуклые части кривой от ее вогнутых частей, называются точками перегиба.*

Если будем, двигаясь по кривой в сторону возрастания x, следить за изменением угла α, образуемого касательной с положительным направлением оси OX, то увидим (черт. 76), что *на участках выпуклости этот угол убывает, а на участках вогнутости возрастает.* Такое же изменение, следовательно, будет претерпевать и $\operatorname{tg}\alpha$, т. е. производная $f'(x)$, так как с увеличением (уменьшением) угла α и $\operatorname{tg}\alpha$ увеличивается (уменьшается). Но промежутки убывания $f'(x)$ суть те промежутки, где производная этой функции отрицательна, т. е. $f''(x)<0$, и точно так же промежутки возрастания $f'(x)$ суть те промежутки, где $f''(x)>0$. Мы получим, таким образом, теорему:

Черт. 74.



Черт. 75.

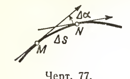
Черт. 76.

Кривая обращена выпуклостью в сторону положительных ординат на тех участках, где $f''(x)<0$, и вогнутостью на тех, где $f''(x)>0$. Точки перегиба суть те ее точки, при переходе через которые $f''(x)$ меняет знак.

Из этой теоремы мы путем рассуждений, аналогичных приведенным раньше рассуждениям [58], получаем правило нахождения точек перегиба кривой: *чтобы найти точки перегиба кривой, надо определить те значения x, при которых $f''(x)$ обращается в нуль или не существует, и исследовать изменение знака $f''(x)$ при переходе через эти значения x, пользуясь следующей таблицей:*

	точка перегиба		нет точки перегиба	
$f''(x)$	$+-$	$-+$	$--$	$++$
	вогн. вып.	вып. вогн.	выпукл.	вогн.

Наиболее естественное представление об искривлении кривой мы получим, если будем следить за изменением угла α, составляемого касательной с осью OX при движении по кривой. Из двух дуг одинаковой длины Δs та дуга будет более искривлена, для которой касательная повернется на больший угол, т. е. для которой приращение $\Delta\alpha$ будет больше. Эти соображения приводят нас к понятию о средней кривизне Δs и о кривизне в данной точке: *средней кривизной дуги* Δs *называется абсолютная величина отношения угла* $\Delta\alpha$ *между касательными в концах этой дуги к длине* Δs *дуги. Предел этого отношения при стремлении* Δs *к нулю называется кривизной кривой в данной точке* (черт. 77).



Черт. 77.

Таким образом, для кривизны C мы получаем выражение:

$$C = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha$ есть первая производная y', т. е.

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} y',$$

откуда, дифференцируя по x сложную функцию $\operatorname{arc\,tg} y'$:

$$d\alpha = \frac{y''}{1+y'^2}\,dx.$$

Как мы только что показали:

$$ds = \pm\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Деля $d\alpha$ на ds, получим окончательно выражение для кривизны:

$$C = \pm\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}. \qquad (5)$$

На участках выпуклости надо брать знак (—), а на участках вогнутости знак (+) для того, чтобы C получило положительное значение.

В тех точках кривой, где не существует производных y' или y'', не существует и кривизны. Вблизи тех точек, где y'' обращается в нуль, и, следовательно, кривизна обращается в нуль, кривая походит на прямую. Это будет, например, вблизи точек перегиба.

Положим, что координаты x, y точек кривой выражены через длину дуги s. В этом случае, как мы видели:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}.$$

Угол α будет также функцией s, и, дифференцируя написанные равенства по s, получим:

$$-\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d^2x}{ds^2},\quad \cos\alpha\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d^2y}{ds^2}.$$

Возводя обе части этих равенств в квадрат и складывая, будем иметь:

$$\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 \quad \text{или} \quad C^2=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2,$$

откуда:

$$C=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}$$

Величина $\frac{1}{C}$, обратная кривизне, *называется радиусом кривизны.* Для радиуса кривизны R мы будем иметь, в силу (5), следующее выражение:

$$R=\left|\frac{ds}{d\alpha}\right|=\pm\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \tag{6}$$

или

$$R=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}},$$

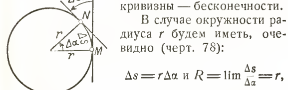
причем значение корня берется положительным.

В случае прямой линии y есть полином первой степени от x, а потому y'' тождественно равна нулю, т. е. вдоль всей прямой кривизна равна нулю, а радиус кривизны — бесконечности.

В случае окружности радиуса r будем иметь, очевидно (черт. 78):

$$\Delta s=r\Delta\alpha \text{ и } R=\lim\frac{\Delta s}{\Delta\alpha}=r,$$

т. е. радиус кривизны вдоль всей окружности постоянен.



Черт. 78.



Черт. 79.

Впоследствии мы увидим, что таким свойством обладает только окружность.

Заметим, что изменение радиуса кривизны совсем не так наглядно, как изменение касательной. Рассмотрим линию, состоящую из отрезка AB прямой и дуги BC окружности, касательной к отрезку в конце B (черт. 79). На участке AB радиус кривизны равен бесконечности, на участке же BC он равен радиусу окружности r и, таким образом, в точке B он терпит разрыв непрерывности, хотя при этом направление касательной меняется

непрерывно. Этим обстоятельством объясняются толчки вагонов на поворотах. Допустим, что величина скорости движения вагона v остается неизменной. В этом случае, как известно из механики, сила будет направлена по нормали к траектории и равна $m\frac{v^2}{R}$, где m есть масса движущегося тела и R — радиус кривизны траектории. Отсюда видно, что в точках разрыва непрерывности радиуса кривизны и сила будет претерпевать разрыв непрерывности, что и обуславливает толчок.

72. Асимптоты. Перейдем теперь к изучению *бесконечных ветвей* кривой, на которых одна из координат x или y или обе вместе беспредельно возрастают. Гипербола и парабола дают нам примеры кривых с бесконечными ветвями.

Асимптотой кривой с бесконечною ветвью называется такая прямая, что расстояние точек кривой до этой прямой при беспредельном удалении по бесконечной ветви стремится к нулю.

Черт. 80.

Покажем сначала, как находить асимптоты кривой, параллельные оси OY. Уравнение такой асимптоты должно иметь вид:

$$x = c,$$

где c — постоянная, и в этом случае при движении по соответствующей бесконечной ветви x должно стремиться к c, а y — к бесконечности (черт. 80). Мы получаем, таким образом, следующее правило:

Все асимптоты кривой

$$y = f(x),$$

параллельные оси OY, можно получить, найдя те значения $x = c$, при приближении к которым $f(x)$ стремится к бесконечности.

Для исследования того, как расположена кривая относительно асимптоты, надо определить знак $f(x)$ при стремлении x к c слева и справа.

Перейдем теперь к нахождению асимптот, непараллельных оси OY. В этом случае уравнение асимптоты должно иметь вид:

$$\eta = a\xi + b,$$

где ξ, η — текущие координаты асимптоты, в отличие от x, y — текущих координат кривой.

Пусть ω есть угол, образованный асимптотой с положительным направлением оси OX, $\overline{MK}$ — расстояние точки кривой до асимптоты

и $\overline{MK_1}$ — разность ординат кривой и асимптоты при одинаковой абсциссе x (черт. 81). Из прямоугольного треугольника будем иметь:

$$|\overline{MK_1}| = \frac{\overline{MK}}{|\cos\omega|} \quad \left(\omega \neq \frac{\pi}{2}\right),$$

и, следовательно, условие:

$$\lim \overline{MK} = 0$$

мы можем заменить условием:

$$\lim \overline{MK_1} = 0. \tag{7}$$

В случае асимптоты, непараллельной оси OY, при движении по соответствующей бесконечной ветви x стремится к бесконечности. Принимая во внимание, что $\overline{MK_1}$ есть разность ординат кривой и асимптоты при одинаковых абсциссах, можем переписать условие (7) так:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax - b] = 0, \tag{8}$$

откуда мы и должны получить значения a и b.

Условие (8) можно переписать в виде:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right] = 0,$$

Черт. 81.

но первый множитель x стремится к бесконечности, а потому выражение, стоящее в квадратных скобках, должно стремиться к нулю:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - a = 0,$$

т. е.

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Найдя a, мы определим b из основного условия (8), которое можно переписать в виде:

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax].$$

Итак, *для существования асимптоты, непараллельной оси* OY, *у кривой*

$$y = f(x)$$

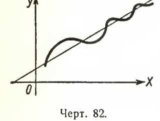
необходимо и достаточно, чтобы при движении по бесконечной ветви x беспредельно возрастало и чтобы существовали пределы:

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax],$$

и тогда уравнение асимптоты будет:

$$\eta = a\xi + b.$$

Для исследования расположения кривой относительно асимптоты, надо отдельно разобрать случаи стремления x к $(+\infty)$ и $(-\infty)$ и в каждом из этих случаев определить знак разности:



Черт. 82.

$$f(x) - (ax + b).$$

Если он будет $(+)$, то кривая расположена над асимптотой, а если $(-)$, то под асимптотой. Если же эта разность при беспредельном возрастании x не будет сохранять неизменного знака, то кривая будет колебаться около асимптоты (черт. 82).

73. Построение графиков. Укажем теперь схему действий, которые надо проделать при построении кривой

$$y = f(x),$$

более полную, чем это сделано в [59].

Для этого нужно:

a) определить промежуток изменения независимой переменной x;

b) определить точки пересечения кривой с осями координат;

c) определить вершины кривой;

d) определить выпуклость, вогнутость и точки перегиба кривой;

e) определить асимптоты кривой;

f) выяснить симметричность кривой относительно осей координат, если таковая существует.

Для более точного вычерчивания кривой полезно также наметить еще ряд точек кривой. Координаты этих точек можно вычислить, пользуясь уравнением кривой.

1. Вычертим кривую

$$y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}.$$

a) x может изменяться в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

b) Полагая $x = 0$, получим $y = -\frac{9}{4}$; полагая $y = 0$, получим $x = 3$, т. е. кривая пересекается с осями координат в точках $\left(0, -\frac{9}{4}\right)$ и $(3, 0)$.

c) Составляем первую и вторую производные:

$$f'(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Применяя обычное правило, получим вершины $(3, 0)$ — минимум, $(-1, -2)$ — максимум.

d) Из выражения второй производной видно, что она положительна при $x > 1$ и отрицательна при $x < 1$, т. е. промежуток $(1, \infty)$ есть промежуток вогнутости кривой, а промежуток $(-\infty, 1)$ есть промежуток выпуклости. Точек перегиба нет, так как $f''(x)$ меняет знак лишь при $x = 1$, а этому значению x соответствует, как мы сейчас увидим, асимптота, параллельная оси OY.

e) При $x = 1$, y обращается в бесконечность, и кривая имеет асимптоту

$$x = 1.$$

Будем теперь искать асимптоты, непараллельные оси OY:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{(x-3)^2}{4(x-1)x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(1 - \frac{3}{x}\right)^2}{4\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{4},$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)} - \frac{x}{4}\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{-5x+9}{4(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-5 + \frac{9}{x}}{4\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = -\frac{5}{4},$$

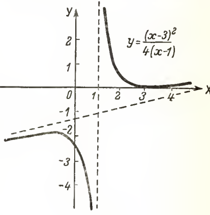
т. е. асимптота будет:

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}.$$

Предлагаем читателю исследовать расположение кривой относительно асимптоты.

f) Симметрии не имеется.

Нанося все полученные данные на чертеж, получим кривую (черт. 83).



Черт. 83.

2. Исследуем кривые:

$$y = c(a^2 - x^2)(5a^2 - x^2) \quad (c < 0)$$
$$y_1 = c(a^2 - x^2)^2,$$

которые дают форму тяжелой балки, изгибающейся под влиянием собственного веса, причем первая кривая относится к тому случаю, когда концы балки могут свободно поворачиваться, а вторая — когда они заделаны наглухо. Общая длина балки $2a$, начало координат в середине балки и ось OY направлена вертикально вверх.

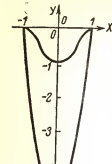
a) Очевидно, нас интересует изменение x лишь в промежутке $(-a, +a)$.

b) Полагая $x = 0$, получим $y = 5ca^4$ и $y_1 = ca^4$, т. е. в первом случае прогиб середины балки в пять раз больше, чем во втором. При $x = \pm a$, $y = y_1 = 0$, что соответствует концам балки.

c) Определим производные:

$$y' = -4cx(3a^2 - x^2), \quad y'' = -12c(a^2 - x^2),$$
$$y_1' = -4cx(a^2 - x^2), \quad y_1'' = -4c(a^2 - 3x^2).$$

В обоих случаях в промежутке $(-a, +a)$ будет существовать минимум при $x=0$, что соответствует прогибу середины балки, о котором мы говорили выше.



Черт. 84.

d) В первом случае $y''>0$ в промежутке $(-a, +a)$, т. е. в первом случае вся балка обращена вогнутостью вверх. Во втором случае y''_1 обращается в нуль при $x=\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ и меняет притом знак, т. е. соответствующие точки будут точками перегиба балки.

e) Бесконечных ветвей нет.

f) В обоих случаях уравнение не меняется при замене x на $(-x)$, т. е. в обоих случаях кривая симметрична относительно оси OY.

На черт. 84 изображены обе кривые. Для простоты нами взят случай $a=1$, $c=-1$; на практике длина балки значительно больше ее прогиба, т. е. a значительно больше c, так что внешний вид кривой прогиба будет несколько иной (какой?).

Предлагаем читателю найти точки перегиба кривой

$$y=e^{-x^2}$$

и сравнить с черт. 60, на котором изображен соответствующий график.

74. Параметрическое задание кривой. При отыскании уравнения геометрического места по данному его свойству не всегда бывает удобно или возможно выразить это свойство непосредственно в виде уравнения, связывающего текущие координаты x, y. В таком случае бывает полезно ввести третью, вспомогательную переменную величину, через которую можно выразить отдельно абсциссу x и ординату y любой точки геометрического места.

Совокупность двух полученных таким путем уравнений:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t) \tag{9}$$

также может служить для построения и исследования кривой, так как при каждом значении t она определяет положение соответствующей точки кривой.

Такой способ задания кривой называется *параметрическим*, вспомогательная же переменная t — *параметром*. Для получения уравнения кривой в обычном (явном или неявном) виде как зависимости, связывающей x и y, нужно из двух уравнений (9) *исключить* параметр t, что можно сделать, хотя бы решив одно из этих уравнений относительно t и подставив полученный результат в другое.

С параметрическим заданием кривых особенно часто приходится иметь дело в механике, при исследовании траектории движущейся точки, положение которой зависит от времени t, а потому и координаты суть функции от t. Определив эти функции, мы и получим параметрическое задание траектории.

Так, например, параметрическое уравнение окружности с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом r будет:

$$x = x_0 + r\cos t; \quad y = y_0 + r\sin t. \tag{10}$$

Перепишем эти уравнения:

$$x - x_0 = r\cos t; \quad y - y_0 = r\sin t.$$

Возводя обе части в квадрат и складывая, исключим параметр t и получим обычное уравнение окружности:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Точно так же непосредственно ясно, что

$$x = a\cos t; \quad y = b\sin t \tag{11}$$

есть параметрическое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Положим, что y, как функция от x, определена параметрически формулами (9).

Приращение параметра Δt вызовет соответствующие приращения Δx и Δy, и мы получим, деля числитель и знаменатель дроби $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ на Δt, следующее выражение для производной от y по x:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{12}$$

Составим вторую производную от y по x:

$$y'' = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}.$$

Применяя правило нахождения дифференциала частного, получим [50]:

$$y'' = \frac{d^2y \cdot dx - d^2x \cdot dy}{(dx)^3}. \tag{13}$$

Но в силу (9):

$$dx = \varphi'(t)\,dt, \qquad d^2x = \varphi''(t)\,dt^2,$$
$$dy = \psi'(t)\,dt, \qquad d^2y = \psi''(t)\,dt^2.$$

Подставляя это в (13) и сокращая на dt^3, получим окончательно:

$$y'' = \frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \tag{14}$$

Заметим, что выражение y'' по формуле (13) отличается от выражения той же производной по формуле (3) из [55] (при $n = 2$)

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \tag{15}$$

потому что это последняя формула выведена лишь в том предположении, что x есть независимая переменная, а при параметрическом представлении (9) независимой переменной является t. Если x есть независимая переменная, то dx считается уже постоянным [**50**], т. е. независящим от x, и $d^2x = d(dx) = 0$ как дифференциал постоянной. При этом формула (13) переходит в (15).

Имея возможность определить y' и y'', мы тем самым можем решить вопрос о направлении касательной к кривой, о выпуклости и вогнутости кривой и т. д.

В качестве примера рассмотрим кривую, заданную уравнением

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \qquad (a > 0) \tag{16}$$

и называемую „листом Декарта".

Введем переменный параметр t, полагая

$$y = tx, \tag{17}$$

и рассмотрим точки пересечения прямой (17) с переменным угловым коэффициентом t и кривой (16). Подставляя в уравнение (16) выражение y из уравнения (17) и сокращая на x^2, получим:

$$x = \frac{3at}{1 + t^3},$$

а уравнение (17) даст нам тогда:

$$y = \frac{3at^2}{1 + t^3}.$$

Эти уравнения дают параметрическую форму представления листа Декарта. Определим производные от x и y по t:

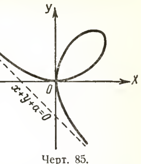
$$\left.\begin{aligned} x'_t &= 3a\,\frac{(1 + t^3) - 3t^2 \cdot t}{(1 + t^3)^2} = \frac{6a\left(\frac{1}{2} - t^3\right)}{(1 + t^3)^2}, \\ y'_t &= 3a\,\frac{2t(1 + t^3) - 3t^2 \cdot t^2}{(1 + t^3)^2} = \frac{3at(2 - t^3)}{(1 + t^3)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Для исследования изменения x и y разобьем весь промежуток $(-\infty, +\infty)$ изменения t на такие отдельные части, внутри которых производные x'_t и y'_t сохраняют неизменный знак и не обращаются в бесконечность. Для этого нам придется отметить значения:

$$t = -1,\ 0,\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ и } \sqrt[3]{2},$$

при которых эти производные обращаются в нуль или бесконечность. Знаки x'_t и y'_t внутри этих промежутков определятся без труда по формулам (18); вычислив значения x и y на концах промежутков, мы получим, таким образом, приведенную ниже таблицу.

В соответствии с этой схемой мы получим кривую, изображенную на черт. 85.



Черт. 85.

Промежуток t	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty, -1)$	$+$	$-$	возрастает от 0 до $+\infty$	убывает от 0 до $-\infty$
$(-1, 0)$	$+$	$-$	возрастает от $-\infty$ до 0	убывает от $+\infty$ до 0
$\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$+$	$+$	возрастает от 0 до $\sqrt[3]{4a}$	возрастает от 0 до $\sqrt[3]{2a}$
$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2}\right)$	$-$	$+$	убывает от $\sqrt[3]{4a}$ до $\sqrt[3]{2a}$	возрастает от $\sqrt[3]{2a}$ до $\sqrt[3]{4a}$
$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$	$-$	$-$	убывает от $\sqrt[3]{2a}$ до 0	убывает от $\sqrt[3]{4a}$ до 0

Для вычисления углового коэффициента касательной имеем формулу:

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2} - t^3\right)}. \tag{19}$$

Обратим внимание на то, что x и y обращаются в нуль при $t=0$ и $t=\infty$, и кривая, как это видно из чертежа, пересекает сама себя в начале координат.

Формула (19) дает нам:

$$y'_x = 0 \quad \text{при } t = 0,$$

$$y'_x = \lim_{t\to\infty} \frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)} = \lim_{t\to\infty} \frac{t\left(\frac{2}{t^3}-1\right)}{2\left(\frac{1}{2t^3}-1\right)} = \infty \quad \text{при } t = \infty,$$

т. е. две ветви кривой, взаимно пересекающиеся в начале координат, касаются — одна оси OX и другая оси OY.

При стремлении t к (-1) x и y стремятся к бесконечности, и кривая имеет бесконечную ветвь. Определим асимптоту:

угловой коэффициент асимптоты равен $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{t\to -1} \frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)} = -1$,

$$b = \lim_{t\to -1}(y+x) = \lim_{t\to -1} \frac{3at^2+3at}{1+t^3} = \lim_{t\to -1} \frac{6at+3a}{3t^2} = -a,$$

т. е. уравнение асимптоты будет:

$$y = -x - a \quad \text{или} \quad x + y + a = 0.$$

75. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Если считать, что газ точно следует законам Бойля — Мариотта и Гей-Люссака, то получается, как известно, следующая зависимость между упругостью газа p, его объемом v и абсолютной температурой T:

$$pv = RT,$$

где R — постоянная, одна и та же для всех газов, если рассматривать одну „грамм-молекулу“ газа, т. е. число граммов газа, равное его молекулярному весу.

Существующие газы не подчиняются строго указанной зависимости, и Ван-дер-Ваальсом была дана другая формула, гораздо более точно выражающая явление. Формула эта имеет вид:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT,$$

где a и b — положительные постоянные, различные для различных газов.

Решая уравнение относительно p, получим:

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}. \tag{20}$$

Исследуем зависимость p от v, считая T постоянным, т. е. рассматривая случай изотермического изменения состояния газа. Найдем первую производную от p по v:

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3} = \frac{1}{(v-b)^2}\left[\frac{2a(v-b)^2}{v^3} - RT\right]. \tag{21}$$

Мы будем рассматривать только значения $v > b$. По поводу физического смысла этого условия, а также кривых, которые будут получены, отсылаем читателя к курсам физики.

Приравнивая производную нулю, получим уравнение:

$$\frac{2a(v-b)^2}{v^3} - RT = 0. \tag{22}$$

Исследуем изменение левой части этого уравнения при изменении v от b до $(+\infty)$ и для этого определим ее производную по v, помня, что произведение RT по условию постоянно:

$$\left[\frac{2a(v-b)^2}{v^3}\right]' = 2a\frac{2(v-b)v^3 - 3v^2(v-b)^2}{v^6} = -\frac{2a(v-b)(v-3b)}{v^4},$$

откуда видно, что эта производная положительна при $b < v < 3b$ и отрицательна при $v > 3b$, т. е. левая часть уравнения (22) возрастает в промежутке $(b, 3b)$ и убывает при дальнейшем увеличении v, а потому при $v = 3b$ она достигает максимума, равного

$$\frac{8a}{27b} - RT.$$

Непосредственной подстановкой нетрудно также убедиться, что левая часть уравнения (22) при $v = b$ и $v = +\infty$ обращается в $(-RT)$ и, следовательно, имеет знак (—). Если найденный максимум ее также отрицателен, т. е. если

$$RT > \frac{8a}{27b},$$

то левая часть уравнения (22) постоянно отрицательна, а в этом случае из выражения (21) видно, что производная $\frac{dp}{dv}$ постоянно отрицательна, т. е. p убывает с возрастанием v.

Наоборот, если

$$RT < \frac{8a}{27b},$$

то левая часть уравнения (22) достигает положительного максимума при $v = 3b$, и уравнение (22) имеет один корень v_1 в промежутке $(b, 3b)$ и другой корень v_2 в промежутке $(3b, +\infty)$. При переходе v через значение v_1 левая часть уравнения (22) и, следовательно, $\frac{dp}{dv}$ переходит от знака (—) к знаку (+), т. е. этому значению v соответствует минимум p. Точно так же убедимся, что значению $v = v_2$ соответствует максимум p.

Черт. 86.

Если, наконец,

$$RT = \frac{8a}{27b}, \tag{23}$$

то максимум левой части уравнения (22) равен нулю, значения $v = v_1$ и $v = v_2$ сливаются в одно значение $v = 3b$, при переходе через это значение левая часть уравнения (22) и $\frac{dp}{dv}$ сохраняют знак (—), т. е. p постоянно убывает с возрастанием v, и значению $v = 3b$ соответствует точка перегиба K кривой. Соответствующие этой точке перегиба значения $v = v_k$, $p = p_k$ и значение температуры $T = T_k$, определяемое из условия (23), называются критическими объемом, упругостью и температурой газа. На черт. 86 указан вид кривых, соответствующих трем рассмотренным случаям.

76. Особые точки кривых. Рассмотрим уравнение кривой в неявной форме:

$$F(x, y) = 0. \tag{24}$$

Угловой коэффициент касательной к такой кривой определяется по формуле [69]:

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \tag{25}$$

где (x, y) — координаты точки касания.

Рассмотрим тот частный случай, когда $F(x, y)$ есть целый многочлен от x и y. В этом случае кривая (24) называется алгебраической. Частные производные $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ будут иметь вполне определенные значения, если вместо x и y подставить координаты любой точки M кривой (24), и уравнение (25) даст нам определенный угловой коэффициент касательной, во всех случаях, кроме тех, когда координаты точки (x, y) обращают в нуль частные производные $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$. Такая точка M называется особой точкой кривой (24).

Особой точкой алгебраической кривой (24) *называется точка, координаты которой удовлетворяют уравнению* (24) *и уравнениям:*

$$F'_x(x, y) = 0, \quad F'_y(x, y) = 0. \tag{26}$$

Для эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

условие (26) даст нам $x = y = 0$, но точка (0, 0) не лежит на эллипсе, а потому эллипс особых точек не имеет. То же можно утверждать и относительно гиперболы и параболы.

В случае листа Декарта

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

условия (26) будут иметь вид:

$$3x^2 - 3ay = 0 \quad \text{и} \quad 3y^2 - 3ax = 0,$$

и непосредственно видно, что начало координат (0, 0) является особой точкой кривой. При исследовании листа Декарта мы показали, что в начале координат кривая пересекает сама себя, и две ветви кривой, пересекающиеся в этой точке, имеют в ней различные касательные: для одной из ветвей касательной является ось OX, для другой — ось OY.

Особая точка, в которой пересекаются различные ветви кривой так, что каждая ветвь имеет свою особую касательную, называется узловой точкой кривой.

Таким образом, начало координат является узловой точкой листа Декарта.

Укажем еще на примерах некоторые типы особых точек алгебраических кривых.

1. Рассмотрим кривую

$$y^2 - ax^3 = 0 \quad (a > 0),$$

называемую *полукубической параболой.* Нетрудно проверить, что координаты (0, 0) обращают в нуль левую часть этого уравнения и ее частные производные по x и y, и, следовательно, начало координат является особой

точкой кривой. Для исследования вида кривой вблизи этой особой точки построим эту кривую. Ее уравнение в явной форме будет:

$$y = \pm \sqrt{ax^3}.$$

Для построения кривой достаточно исследовать ту ее часть, которая соответствует знаку (+), ибо часть кривой, соответствующая знаку (—), будет симметрична с первой частью относительно оси OX. Из уравнения видно, что x не может быть только меньше нуля и что при возрастании x от 0 до $(+\infty)$ и y возрастает от 0 до $(+\infty)$.

Определим производные первых двух порядков:

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{ax}; \qquad y'' = \frac{3\sqrt{a}}{4\sqrt{x}}.$$

При $x = 0$ и $y' = 0$, и заметив, что x может стремиться к нулю, принимая лишь положительные значения, можем утверждать, что ось OX будет касательной к кривой справа в начале координат. Кроме того видно, что для исследуемой части кривой y'' сохраняет неизменный знак (+) в промежуток $(0, +\infty)$, т. е. эта часть обращена вогнутостью в сторону положительных ординат.

На черт. 87 изображена исследуемая кривая (при $a = 1$). *В начале координат встречаются, не продолжаясь дальше, две ветви кривой, причем обе ветви в точке встречи имеют одну и ту же касательную и расположены по разные стороны от этой касательной вблизи особой точки* (в данном случае — везде). Такая особоя точка называется *точкой возврата первого рода*.

Черт. 87. Черт. 88.

2. Рассмотрим кривую:

$$(y - x^2)^2 - x^5 = 0.$$

Нетрудно проверить, что начало координат является особой точкой кривой. Уравнение кривой в явной форме будет:

$$y = x^2 \pm \sqrt{x^5}.$$

Из этого уравнения видно, что x может изменяться от 0 до $(+\infty)$. Определим производные двух первых порядков:

$$y' = 2x \pm \frac{5}{2}\sqrt{x^3}, \qquad y'' = 2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{x}$$

и исследуем отдельно обе ветви кривой, соответствующие знакам (+) и (—).

Заметим, прежде всего, что в обоих случаях, при $x=0$ и $y'=0$ и так же, как в предыдущем примере, ось OX будет для обеих ветвей касательной справа.

Исследуя обе ветви обычным способом, получим следующие результаты: для первой ветви при возрастании x от 0 до $(+\infty)$ и y возрастает от 0 до $(+\infty)$, и кривая вогнута; на второй ветви имеется вершина (максимум) при $x=\frac{16}{25}$, точка перегиба при $x=\frac{64}{225}$ и точка пересечения с осью OX при $x=1$.

Принимая во внимание все указанное, получим кривую, изображенную на черт. 88.

В начале координат встречаются, не продолжаясь дальше, две ветви кривой, причем обе ветви в точке встречи имеют одну и ту же касательную и расположены по одну сторону от этой касательной вблизи особой точки. Такая особая точка называется *точкой возврата второго рода.*

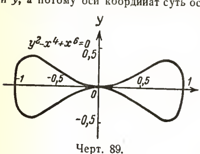
3. Исследуем кривую:

$$y^2 - x^4 + x^6 = 0.$$

Начало координат есть особая точка кривой. Уравнение кривой в явной форме будет:

$$y = \pm x^2 \sqrt{1-x^2}.$$

Уравнение кривой в неявной форме содержит только четные степени x и y, а потому оси координат суть оси симметрии кривой, и достаточно исследовать часть кривой, соответствующую положительным значением x и y. Из уравнения кривой в явной форме видно, что x может изменяться от (-1) до 1.



Черт. 89.

Ограничимся вычислением первой производной:

$$y' = \frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

При $x=0$ и $y=y'=0$, т. е. в начале координат касательная совпадает с осью OX, а при $x=1$, $y=0$ и $y'=\infty$, т. е. в точке $(1, 0)$, касательная параллельна оси OY. По обычным правилам найдем, что кривая будет иметь вершину при $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Принимая во внимание все сказанное и, в частности, симметричность кривой, получим кривую, изображенную на черт. 89. В начале координат *две ветви кривой*, соответствующие знакам $(+)$ и $(-)$ перед корнем, *взаимно касаются.* Такая особая точка называется *точкой соприкосновения.*

4. Исследуем кривую

$$y^2 - x^2(x-1) = 0.$$

Начало координат есть особая точка кривой. Явное уравнение кривой будет:

$$y = \pm \sqrt{x^2(x-1)}.$$

Принимая во внимание, что подкоренное выражение не может быть отрицательным, можем утверждать, что либо $x=0$, либо $x \geqslant 1$.

При $x=0$ и $y=0$. Исследуем теперь ветвь кривой, соответствующую знаку $(+)$. При увеличении x от 1 до $(+\infty)$ y увеличивается от 0 до $(+\infty)$.

Из выражения первой производной:

$$y' = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$$

видно, что, при $x=1$, y' обращается в бесконечность, т. е. в точке (1, 0) касательная параллельна оси OY. Вторая ветвь кривой, соответствующая знаку (—), будет симметрична с исследованной относительно оси OX. Принимая все это во внимание, получим кривую, изображенную на черт. 90.

В рассматриваемом случае координаты точки O (0, 0) удовлетворяют уравнению кривой, *но вблизи нее нет других точек кривой. В этом случае особая точка называется изолированной точкой.*

Указанными выше типами особых точек исчерпываются всевозможные случаи особых точек алгебраических кривых, но может случиться, что в некоторой точке алгебраической кривой произойдет совпадение нескольких особых точек, одинаковых или разных типов.

Кривые не алгебраические называются *трансцендентными.*

Предлагаем читателю показать, что уравнению

$$y = x \log x$$

соответствует кривая, изображенная на черт. 91. Начало координат является *точкой прекращения кривой.*

Черт. 90.

Черт. 91.

77. Элементы кривой. Приведем основные формулы, связанные с понятием касательной к кривой и ее кривизны, и введем еще некоторые новые понятия, связанные с понятием касательной.

Если уравнение кривой имеет вид:

$$y = f(x), \tag{27}$$

то угловой коэффициент касательной есть производная $f'(x)$ от y по x, и уравнение касательной может быть написано в виде:

$$Y - y = y'(X - x) \qquad (y' = f'(x)), \tag{28}$$

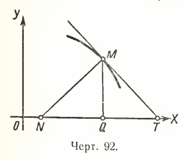
где (x, y) — координаты точки касания и (X, Y) — текущие координаты касательной. *Нормалью к кривой в точке (x, y) кривой называют прямую, проведенную через эту точку перпендикулярно к касательной в этой точке.* Как известно из аналитической геометрии, угловые коэффициенты перпендикулярных прямых обратны по величине и по знаку, т. е. угловой коэффициент нормали будет $\left(-\frac{1}{y'}\right)$, и уравнение нормали можно написать так:

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$$

или

$$(X-x)+y'(Y-y)=0. \tag{29}$$

Пусть M есть некоторая точка кривой, T и N — точки пересечения касательной и нормали кривой в точке M с осью OX, Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ось OX (черт. 92). *Отрезки QT и QN, лежащие на оси OX, называются подкасательной и поднормалью кривой в точке M,* и отрезкам этим соответствуют определенные числа, положительные или отрицательные, смотря по направлению этих отрезков на оси OX. Длины отрезков MT и MN *называются длиною касательной* и *длиною нормали кривой в точке M,* причем длины эти мы будем считать всегда положительными. Абсцисса точки Q на оси OX равна, очевидно, абсциссе x точки M. Точки T и N суть точки пересечения касательной и нормали с осью OX, а потому для определения абсцисс этих точек надо положить в уравнении касательной и нормали $Y=0$ и полученные уравнения разрешить относительно X. Мы получим, таким образом, для абсциссы точки T выражение $\left(x-\frac{y}{y'}\right)$, а для абсциссы точки N — выражение $(x+yy')$. Нетрудно теперь определить величину подкасательной и поднормали:



Черт. 92.

$$\left.\begin{aligned} \overline{QT}&=\overline{OT}-\overline{OQ}=x-\frac{y}{y'}-x=-\frac{y}{y'}, \\ \overline{QN}&=\overline{ON}-\overline{OQ}=x+yy'-x=yy'. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Из прямоугольных треугольников MQT и MQN можно определить теперь длины касательной и нормали:

$$\left.\begin{aligned} |\overline{MT}|&=\sqrt{\overline{MQ}^2+\overline{QT}^2}=\sqrt{y^2+\frac{y^2}{y'^2}}=\pm\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}, \\ |\overline{MN}|&=\sqrt{\overline{MQ}^2+\overline{QN}^2}=\sqrt{y^2+y^2y'^2}=\pm y\sqrt{1+y'^2}, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

причем знак ($\pm$) надо выбирать так, чтобы выражения в правой части оказались положительными.

Напомним еще формулу для радиуса кривизны кривой [71]:

$$R=\pm\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}. \tag{32}$$

Обозначая длину нормали буквою n, получим из второй из формул (31):

$$\sqrt{1+y'^2} = \pm \frac{n}{y},$$

и, подставляя это значение $\sqrt{1+y'^2}$ в формулу (32), будем иметь еще следующее выражение для радиуса кривизны:

$$R = \pm \frac{n^3}{y^3 y''}. \qquad (32_1)$$

Если кривая задана параметрически:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то первая и вторая производные y' и y'' от y по x выражаются по формулам [74]:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$y'' = \frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{dx^3} = \frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \qquad (33)$$

В частности, подставляя эти выражения в формулу (32), получим выражения радиуса кривизны в рассматриваемом случае:

$$R = \pm \frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{d^2y\,dx - d^2x\,dy} = \pm \frac{\{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2\}^{3/2}}{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)} = \pm \frac{ds}{d\alpha}, \qquad (34)$$

где α есть угол, образуемый касательной с осью OX.

Если кривая задана неявно

$$F(x, y) = 0,$$

то в силу формулы (25) получим следующее уравнение касательной

$$F'_x(x, y)(X - x) + F'_y(x, y)(Y - y) = 0. \qquad (35)$$

78. Цепная линия. Цепной линией называется кривая, которая при соответствующем выборе координатных осей имеет уравнение:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad (a > 0).$$

Кривая эта дает форму равновесия тяжелой нити, подвешенной за два конца. Ее нетрудно построить по правилам, указанным в [73], и вид ее указан на черт. 93.

Определим первую и вторую производные от y:

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right); \quad y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2},$$

откуда

$$1+y'^2=1+\frac{\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}{4}=$$

$$=\frac{4+e^{\frac{2x}{a}}-2+e^{-\frac{2x}{a}}}{4}=\frac{\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}{4}=\frac{y^2}{a^2}.$$

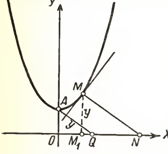
Подставляя это выражение $(1+y'^2)$ во вторую из формул (31), получим для длины нормали кривой:

$$n=\frac{y^2}{a},$$

и подставляя выражение для n и y'' в формулу (32_1), получим:

$$R=\frac{y^6\cdot a^2}{a^3\cdot y^3\cdot y}=\frac{y^2}{a}=n,$$

т. е. *радиус кривизны цепной линии равен длине нормали* MN. При $x=0$ ордината y цепной линии принимает наименьшее значение $y=a$, и соответствующая точка A кривой называется ее *вершиною*.

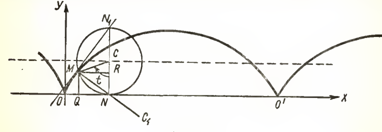


Черт. 93.

На чертеже указаны еще некоторые вспомогательные линии, которые нам понадобятся впоследствии. При замене x на $(-x)$ уравнение цепной линии не меняется, т. е. ось OY есть ось симметрии цепной линии.

79. Циклоида. Вообразим круг радиуса a, который катится без скольжения по неподвижной прямой. Геометрическое место, описанное при таком движении некоторой точкой M окружности круга, называется *циклоидой*.

Примем прямую, по которой катится круг, за ось OX; за начало координат примем начальное положение точки M, когда окружность касается в ней оси OX, и через t обозначим угол поворота окружности. Обозначим далее: через C — центр окружности, через N — точку касания окружности в ее некотором



Черт. 94.

положении с осью OX, через Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ось OX, и через R — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на диаметр NN_1 окружности (черт. 94).

Принимая во внимание, что ввиду отсутствия скольжения

$$\overline{ON}=\text{дуге } NM=at,$$

можем выразить координаты точки M, описывающей циклоиду, через параметр $t = \angle NCM$:

$$x = \overline{OQ} = \overline{ON} - \overline{QN} = at - a\sin t = a(t - \sin t),$$
$$y = \overline{QM} = \overline{NC} - \overline{RC} = a - a\cos t = a(1 - \cos t).$$

Это и дает нам параметрическое представление циклоиды.

Заметим прежде всего, что достаточно рассмотреть изменение t в промежутке $(0, 2\pi)$, который соответствует полному обороту окружности. После этого полного оборота точка M опять совпадает с точкой касания O' окружности и оси OX, но только передвинется на отрезок $\overline{OO'} = 2\pi a$. Часть кривой, которая получится при дальнейшем движении, будет тождественна с дугой OO' и получится, если мы перенесем эту дугу на отрезок $2\pi a$ вправо, и т. д. Вычислим теперь первые и вторые производные от x и y по t:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = a(1 - \cos t), \quad && \frac{dy}{dt} = \psi'(t) = a\sin t, \\ &\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi''(t) = a\sin t, && \frac{d^2y}{dt^2} = \psi''(t) = a\cos t. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Угловой коэффициент касательной в силу первой из формул (33) будет:

$$y' = \frac{a\sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Формула эта приводит к простому способу построения касательной к циклоиде. Соединим точку N_1 с точкой M кривой. Угол MN_1N есть вписанный угол, опирающийся на дугу $NM = t$, и, следовательно, он равен $\frac{t}{2}$. Из прямоугольного треугольника RMN_1 получим (черт. 94):

$$\angle RMN_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}, \quad \operatorname{tg}\angle RMN_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Сравнивая это выражение с выражением для y', видим, что прямая MN_1 и есть касательная к циклоиде, т. е.:

Чтобы построить касательную к циклоиде в ее точке M, достаточно соединить эту точку с концом N_1 того диаметра катящегося круга, другой конец которого находится в точке касания окружности и оси OX.

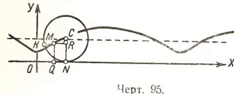
Прямая MN, соединяющая точку M с другим концом только что упомянутого диаметра, перпендикулярна к прямой MN_1, так как угол N_1MN опирается на диаметр, и мы можем поэтому утверждать, что прямая MN *есть нормаль к циклоиде.* Длина нормали $n = \overline{MN}$ определится непосредственно из прямоугольного треугольника N_1MN:

$$n = 2a\sin\frac{t}{2}.$$

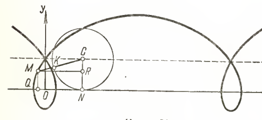
Радиус кривизны циклоиды получим, пользуясь формулой (34) и выражениями (36):

$$R = \pm\frac{[a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t]^{3/2}}{a\cos t\cdot a(1 - \cos t) - a\sin t\cdot a\sin t} = \pm\frac{a(2 - 2\cos t)^{3/2}}{\cos t - 1} =$$
$$= a\cdot 2^{3/2}(1 - \cos t)^{1/2} = 4a\sin\frac{t}{2}.$$

В последнем выражении мы оставляем лишь знак (+), так как для первой ветви циклоиды t заключается в промежутке $(0, 2\pi)$, и $\sin\frac{t}{2}$ не может быть величиной отрицательной.



Черт. 95.



Черт. 96

Сравнивая это выражение с выражением для длины нормали n, будем иметь $R = 2n$, т. е. *радиус кривизны циклоиды равен удвоенной длине нормали* ($\overline{MC}_1$ на черт. 94).

Если бы точка M, которая описывала циклоиду, лежала не на окружности круга, а внутри или вне ее, то при качении круга она описала бы кривую, которая соответственно называется *укороченной* или *удлиненной циклоидой* (иногда обе эти кривые называют *трохоидой*).

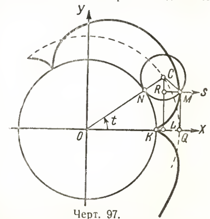
Назовем через h расстояние CM точки M от центра катящегося круга. Остальные обозначения оставим те же. Разберем сначала случай $h < a$, т. е. тот случай, когда точка M находится внутри круга (черт. 95). Непосредственно из чертежа имеем:

$$x = \overline{OQ} = \overline{ON} - \overline{QN} = at - h\sin t, \quad y = \overline{QM} = \overline{NC} - \overline{RC} = a - h\cos t.$$

В случае $h > a$ уравнения будут те же, но кривая примет вид, указанный на черт. 96.

80. Эпициклоиды и гипоциклоиды. Если круг, с окружностью которого связана точка M, катится не по прямой OX, а по некоторой неподвижной окружности, то получатся два обширных класса кривых: *эпициклоиды*, если катящийся круг расположен *вне* неподвижного; *гипоциклоиды*, если катящийся круг расположен *внутри* неподвижного.

Выведем уравнение *эпициклоид*. Поместим начало координат в центр неподвижного круга; ось OX направим по прямой, соединяющей этот центр O с точкой K, которая является начальным положением точки M, когда обе окружности касались друг друга в этой точке. Обозначим буквою a радиус катящейся окружности, через b — радиус неподвижной окружности и примем за параметр t угол, образуемый с осью OX радиусом ON неподвижной окружности, проведенным в точку касания окружностей, когда подвижная окружность повернулась на угол $\varphi = \angle NCM$ (черт. 97).



Черт. 97.

Ввиду того, что качение окружности происходит без скольжения, можем написать:

$$\text{дуга } KN = \text{дуге } NM,$$

т. е.

$$bt = a\varphi, \quad \varphi = \frac{bt}{a}.$$

Из чертежа непосредственно находим:

$$\left.\begin{aligned} x &= \overline{OQ} = \overline{OL} + \overline{LQ} = \overline{OC}\cos\angle KOC - \overline{CM}\cos\angle SMC = \\ &= (a+b)\cos t - a\cos(t+\varphi) = (a+b)\cos t - a\cos\frac{a+b}{a}t, \\ y &= \overline{QM} = \overline{LC} - \overline{RC} = \overline{OC}\sin\angle KOC - \overline{CM}\sin\angle SMC = \\ &= (a+b)\sin t - a\sin(t+\varphi) = (a+b)\sin t - a\sin\frac{a+b}{a}t. \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Кривая состоит из ряда одинаковых дуг, каждая из которых соответствует полному обороту подвижного круга, т. е. увеличению угла φ на 2π, а угла t на $\frac{2a\pi}{b}$.

Таким образом, концы этих дуг соответствуют значениям:

$$t = 0, \ \frac{2a\pi}{b}, \ \frac{4a\pi}{b}, \ \ldots, \ \frac{2pa\pi}{b}, \ \ldots$$

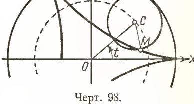
Для того чтобы когда-нибудь мы пришли в начальную точку кривой K, необходимо и достаточно, чтобы один из этих концов совпал с K, т. е. чтобы существовали целые числа p и q, удовлетворяющие условию:

$$\frac{2pa\pi}{b} = 2q\pi,$$

ибо точке K соответствует некоторое число полных оборотов около точки O Предыдущее условие может быть написано так:

$$\frac{a}{b} = \frac{q}{p}.$$

Такие числа p и q будут существовать тогда и только тогда, когда a и b — отрезки, соизмеримые между собою; в противном же случае отношение $\frac{a}{b}$ есть число иррациональное и не может сделаться равным отношению двух целых чисел.



Черт. 98.

Отсюда следует, что эпициклоида представляет замкнутую кривую тогда и только тогда, когда радиусы подвижного и неподвижного кругов соизмеримы; в противном же случае кривая эта незамкнутая и, выйдя из точки K, в нее никогда больше не возвратится.

Это замечание относится и к *гипоциклоидам* (черт. 98), уравнение которых может быть получено из уравнения эпициклоид простою заменой a

на $(-a)$:

$$\left.\begin{aligned} x &= (b-a)\cos t + a\cos\frac{b-a}{a}t, \\ y &= (b-a)\sin t - a\sin\frac{b-a}{a}t. \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

Отметим некоторые частные случаи. Положим, что в случае эпициклоиды $b=a$, т. е. радиусы неподвижного и подвижного кругов равны. Мы получим в этом случае кривую, состоящую из одной ветви (черт. 99), и, подставив в уравнения (37) $b=a$, получим уравнения этой кривой:

$$x = 2a\cos t - a\cos 2t,$$
$$y = 2a\sin t - a\sin 2t.$$

Кривая эта называется *кардиоидой*.

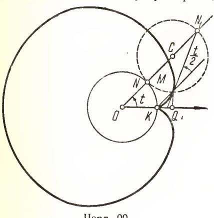
Определим расстояние r точек $M(x, y)$ этой кривой до точки K, имеющей координаты $(a, 0)$, и для этого приведем к более удобному виду выражения для $(x-a)$ и y:

$$x - a = 2a\cos t - a(\cos^2 t - \sin^2 t) - a = 2a\cos t - 2a\cos^2 t = 2a\cos t\,(1-\cos t),$$
$$y = 2a\sin t - 2a\sin t\cos t = 2a\sin t\,(1-\cos t),$$

откуда

$$r = |\overline{KM}| = \sqrt{(x-a)^2+y^2} =$$
$$= \sqrt{4a^2\cos^2 t\,(1-\cos t)^2 + 4a^2\sin^2 t\,(1-\cos t)^2} = 2a(1-\cos t).$$

Разность $(x-a)$ и y суть проекции отрезка KM на оси OX и OY, но из написанных выше выражений видно, что $(x-a)$ и y равны произведению длины отрезка $\overline{KM}$ соответственно на $\cos t$ и $\sin t$, и мы можем поэтому утверждать, что отрезок KM образует угол t с положительным направлением оси OX, т. е. параллелен радиусу ON. Результат этот будет для нас важен в дальнейшем при выводе правила построения касательной к кардиоиде.



Черт. 99.

Введем угол $\theta = \pi - t$, образованный отрезком KM с отрицательным направлением оси OX. Для r мы получим тогда:

$$r = 2a(1+\cos\theta).$$

Уравнение это является уравнением кардиоиды в полярных координатах, и мы более подробно исследуем эту кривую, когда будем говорить о полярных координатах.

Отметим теперь некоторые частные случаи гипоциклоид. Полагая в уравнениях (38) $b=2a$, получим:

$$x = 2a\cos t = b\cos t, \quad y = 0,$$

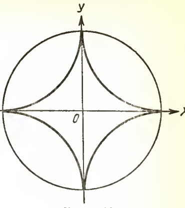
т. е. если радиус неподвижного круга вдвое больше радиуса подвижного круга, то точка M двигается по диаметру неподвижного круга.

Положим теперь, что $b = 4a$. В этом случае гипоциклоида будет состоять из четырех ветвей (черт. 100), и в этом частном случае она называется *астроидой*. Уравнения (38) при $b = 4a$ дадут нам:

$$x = 3a\cos t + a\cos 3t =$$
$$= 3a\cos t + a(4\cos^3 t - 3\cos t) =$$
$$= 4a\cos^3 t = b\cos^3 t,$$
$$y = 3a\sin t - a\sin 3t =$$
$$= 3a\sin t - a(3\sin t - 4\sin^3 t) =$$
$$= 4a\sin^3 t = b\sin^3 t.$$

Возведя обе части уравнений в степень $^2/_3$ и складывая почленно полученные уравнения, исключим параметр t и получим уравнение астроиды в неявной форме:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = b^{2/3}.$$

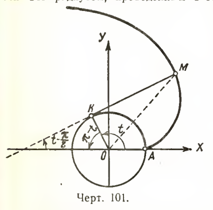


Черт. 100.

81. Развертка круга. *Разверткой круга* называется кривая, которую описывает конец M гибкой нити, постепенно сматывающейся с неподвижной окружности радиуса a, и притом так, что в точке K, где нить отделяется от окружности, она остается касательной к окружности (черт. 101).

Приняв за параметр угол t, образуемый с положительным направлением оси OX радиусом, проведенным в точку K, и принимая во внимание, что $\overline{KM} =$ дуге $AK = at$, получим уравнение развертки круга в параметрической форме:

$$x = \text{пр}_{OX}\overline{OM} = \text{пр}_{OX}\overline{OK} + $$
$$+ \text{пр}_{OX}\overline{KM} = a\cos t + at\sin t,$$
$$y = \text{пр}_{OY}\overline{OM} = \text{пр}_{OY}\overline{OK} + $$
$$+ \text{пр}_{OY}\overline{KM} = a\sin t - at\cos t.$$



Черт. 101.

Определим, пользуясь первой из формул (33), угловой коэффициент касательной:

$$y' = \frac{a\cos t - a\cos t + at\sin t}{-a\sin t + a\sin t + at\cos t} = \operatorname{tg} t.$$

Угловой коэффициент нормали к развертке круга будет, следовательно, равен

$$-\operatorname{ctg} t = \operatorname{tg}\left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда видно, что прямая MK и будет нормалью к развертке круга. Свойство это, как мы увидим впоследствии, имеет место и для разверток любых кривых.

82. Кривые в полярных координатах. Положение точки M на плоскости (черт. 102) определяется в полярных координатах: 1) ее расстоянием r от некоторой данной точки O (полюс) и 2) углом θ, который образует направление отрезка OM с данным направлением (L) (полярная ось). Часто называют r — *радиусом-вектором* и θ — *полярным углом*. Если принять полярную ось за OX, а полюс — за начало координат, то имеем, очевидно (черт. 103):

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta. \tag{39}$$

Черт. 102.

Данному положению точки M соответствует одно определенное положительное значение r и бесчисленное множество значений θ, которые отличаются слагаемым, кратным 2π. Если M совпадает с O, то $r = 0$ и θ — совершенно неопределенно.

Всякая функциональная зависимость вида $r = f(\theta)$ (явная) или $F(r, \theta) = 0$ (неявная) имеет в полярной системе координат свой график. Чаще приходится иметь дело с явным уравнением:

$$r = f(\theta). \tag{40}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать не только положительные, но и отрицательные значения r, причем если некоторому значению θ соответствует отрицательное значение r, то условимся откладывать это значение r в направлении, прямо противоположном тому направлению, которое определяется значением θ.

Черт. 103.

Считая, что на некоторой заданной кривой r есть функция θ, мы видим, что уравнения (39) представляют собой параметрическую форму уравнения этой кривой, причем x и y зависят от параметра θ как непосредственно, так и через посредство r. Мы можем поэтому прилагать в данном случае формулы (33) и (34) [77]. Обозначая через α угол, составленный касательной с осью OX, будем иметь, применяя первую из формул (33):

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta},$$

где через r' мы обозначаем производную от r по θ.

Введем еще в рассмотрение угол μ между положительными направлениями радиуса-вектора и касательной к кривой (черт. 104). Мы имеем:

$$\mu = \alpha - \theta,$$

и, следовательно:

$$\cos\mu = \cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta,$$
$$\sin\mu = \sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta.$$

Дифференцируя равенства (39) по s и принимая во внимание, что $\frac{dx}{ds}$ и $\frac{dy}{ds}$ соответственно равны $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, получим:

$$\cos\alpha = \cos\theta\frac{dr}{ds} - r\sin\theta\frac{d\theta}{ds}, \quad \sin\alpha = \sin\theta\frac{dr}{ds} + r\cos\theta\frac{d\theta}{ds}.$$

Подставляя эти выражения $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ в написанные выше выражения для $\cos\mu$ и $\sin\mu$, будем иметь:

$$\cos\mu = \frac{dr}{ds}, \quad \sin\mu = \frac{r\,d\theta}{ds} \quad (41)$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \frac{r}{r'}. \quad (41_1)$$

Из (39) следует:

$$dx = \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta,$$
$$dy = \sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta,$$

Черт. 104.

а потому

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2}, \quad (42)$$

и равенство $\alpha = \mu + \theta$ дает нам, если мы разделим числитель и знаменатель на $d\theta$:

$$R = \pm\frac{ds}{d\alpha} = \frac{[(dr^2) + r^2(d\theta)^2]^{1/2}}{d\mu + d\theta} = \pm\frac{(r^2 + r'^2)^{1/2}}{1 + \frac{d\mu}{d\theta}}.$$

Из формулы же (41_1) имеем:

$$\mu = \operatorname{arc\,tg}\frac{r}{r'}, \quad \frac{d\mu}{d\theta} = \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2}\cdot\frac{r'^2 - rr''}{r'^2} = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2},$$

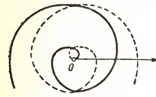
где r' и r'' — производные первого и второго порядка от r по θ. Подставляя полученные выражения производных в предыдущую формулу, будем иметь:

$$R = \pm\frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}. \quad (43)$$

83. Спирали. Разберем три вида спиралей:

спираль Архимеда: $r = a\theta$,
" гиперболическую: $r\theta = a$ $(a > 0;\ b > 0)$,
" логарифмическую: $r = be^{a\theta}$.

Спираль Архимеда имеет вид, изображенный на черт. 105, причем пунктир соответствует части кривой при $\theta < 0$. Отрицательным значениям θ соответствуют и отрицательные значения r, и их надо откладывать в направлении, противоположном тому направлению, которое определяется значением θ.



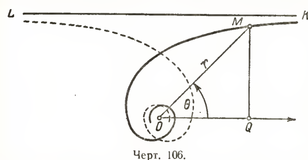
Черт. 105.

Всякий радиус-вектор встречает кривую бесчисленное множество раз, причем расстояние между каждыми двумя последовательными точками пересечения есть величина постоянная, равная $2a\pi$. Это видно из того, что направление радиуса-вектора, соответствующее некоторому данному значению θ, не меняется, если к θ прибавить 2π, 4π...; длина же r, определяемая из уравнения $r=a\theta$, будет получать приращения $2a\pi$, $4a\pi$, ...

Гиперболическая спираль изображена на черт. 106. Предполагая $\theta > 0$, исследуем, что́ будет происходить с кривой, когда θ стремится к нулю. Уравнение

$$r = \frac{a}{\theta}$$

показывает, что r будет стремиться при этом к бесконечности. Возьмем некоторую точку M на кривой при достаточно малом значении θ и опустим



Черт. 106.

перпендикуляр MQ на полярную ось X. Из прямоугольного треугольника MOQ получим (черт. 106):

$$\overline{QM} = r\sin\theta = \frac{a\sin\theta}{\theta},$$

а при стремлении θ к нулю:

$$\lim_{\theta\to 0}\overline{QM} = \lim_{\theta\to 0} a\frac{\sin\theta}{\theta} = a.$$

Итак, расстояние между точкой M кривой и полярной осью, при стремлении θ к нулю, стремится к a, и кривая будет иметь асимптоту LK, параллельную полярной оси и проведенную на расстоянии a от нее.

Далее, видим, что r не обращается в нуль ни при каких конечных значениях θ, а только стремится к нулю, когда θ стремится к бесконечности.

Кривая будет поэтому беспредельио приближаться к полюсу O, закручиваясь около иего, ио иикогда не пройдет через O в противоположность спирали Архимеда. Такая точка изывается, вообще, *асимптотической точкой* кривой.

Логарифмическая спираль изображеиа иа черт. 107.

При $\theta=0$, $r=b$ и при стремлеиии θ к $(+\infty)$ и r стремится к $(+\infty)$, а при стремлении θ к $(-\infty)$ r стремится к иулю, иикогда не обращаясь в иуль. В рассматриваемом случае:

$$r'=abe^{\alpha\theta} \text{ и } \operatorname{tg}\mu=\frac{r}{r'}=\frac{1}{a},$$

т. е. *радиус-вектор образует с касительной к логарифмической спирали постоянный угол* μ.

Черт. 107.

84. Улитки и кардиоида. Построим круг иа диаметре $OA=2a$ (черт. 108); из точки O, лежащей на окружиости, будем проводить радиусы-векторы и иа каждом из иих будем откладывать постояниую длиину $h=\overline{DM}$ от точки пересечеиия D этой прямой с окружностью. Геометрическое место точек M иазывается вообще улиткою.

Замечая, что

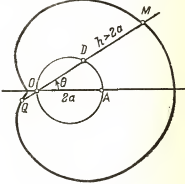
$$\overline{OD}=2a\cos\theta \quad \text{и} \quad \overline{OM}=r,$$

находим уравиеиие улитки:

$$r=2a\cos\theta+h.$$

Если $h>2a$, то уравиеиие это дает для r только положительные зиачения, и соответствующая кривая изображена иа черт. 109. Если $h<2a$, то r будет принимать и отрицательные зиачеиия, кривая

Черт. 108.



Черт. 109.

имеет вид, изображеиный иа черт. 110 В точке O кривая пересекает самое себя. Накоиец, при $h=2a$ уравнение улитки будет:

$$r=2a\ (1+\cos\theta),$$

т. е. в этом случае улитка представляет собою кардиоиду [80], которая только ииаче расположена, чем в [80] (черт. 111). Зиачеиию $\theta=\pi$ будет соответствовать $r=0$, т. е. кривая пройдет через точку O.

Определим первую и вторую производные от r по θ:

$$r' = -2a \sin\theta, \quad r'' = -2a\cos\theta.$$

Вычислим $\operatorname{tg}\mu$:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{r'} = \frac{2a(1+\cos\theta)}{-2a\sin\theta} = -\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right),$$

т. е.

$$\mu = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}. \tag{44}$$

Как было показано раньше [80], кардиоиду можно себе представить как кривую, описанную точкой круга, катящегося по упомянутому выше кругу с диаметром $OA = 2a$, причем диаметр катящегося круга равен диаметру неподвижного круга. Пусть C — центр неподвижного круга, M — некоторая точка кардиоиды, N — точка касания катящегося круга в его положении, соответствующем этой точке, с неподвижным кругом, и NN_1 — диаметр подвижного круга (черт. 111). Выше [80] мы видели, что прямые OM и CN_1 — параллельны [1]), т. е. угол $ACN = \theta$ и, следовательно:

Черт. 110.

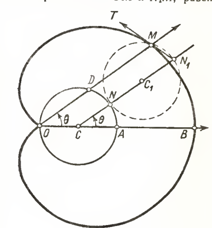
$$\text{дуга } NM = \text{дуге } ON = \pi - \theta.$$

Угол MN_1N, как вписанный, опирающийся на дугу NM, равен $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$, и, наконец, угол, образованный направлениями OM и N_1M, равен:

$$\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} = \mu,$$

откуда видно, что N_1M и есть касательная к кардиоиде в точке M. Мы получаем, таким образом, следующее правило:

Чтобы построить касательную к кардиоиде в ее точке M, достаточно соединить эту точку с концом N_1 того диаметра катящегося круга, другой конец которого находится в точке касания катящегося круга с неподвижным; нормаль пройдет по прямой MN.

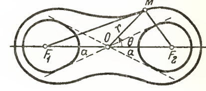


Черт. 111.

Выведенное выше правило построения касательной к кардиоиде получается просто из кинематических соображений. Известно, что вообще движение неизменяемой системы на плоскости в каждый данный момент сводится к вращению вокруг неподвижной точки (мгновенного центра), причем, вообще говоря, положение этой точки меняется с течением времени. В случае качения, указанного на

[1]) В [80] эти две прямые были KM и ON_1 (черт. 99).

черт. 111, мгновенный центр есть точка соприкосновения N катящегося круга с неподвижным, и, следовательно, скорость движущейся точки M, направленная по касательной к кардиоиде, перпендикулярна к лучу NM, т. е. этот луч есть нормаль к кардиоиде, а перпендикулярная к нему прямая N_1M — касательная к кардиоиде. Из этих соображений следует, что приведенное правило построения касательной годится, вообще, для кривых, описанных некоторой точкой окружности, катящейся без скольжения по неподвижной кривой.



Черт. 112.

85. Овалы Кассини и лемниската. Овалы Кассини получаются как геометрическое место точек M, для которых произведение расстояний от двух данных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная:

$$\overline{F_1M}\cdot\overline{F_2M}=b^2.$$

Обозначим длину $\overline{F_1F_2}$ через $2a$, направим полярную ось по линии $\overline{F_1F_2}$ и полюс O поместим в середине отрезка $\overline{F_1F_2}$.

Из треугольников OMF_1 и OMF_2 (черт. 112) находим:

$$\overline{F_1M}^2=r^2+a^2+2ar\cos\theta,$$

$$\overline{F_2M}^2=r^2+a^2-2ar\cos\theta.$$

Подставляя эти выражения в уравнение овалов и возводя его обе части в квадрат, получим после элементарных преобразований:

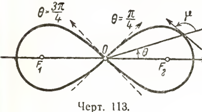
$$r^4-2a^2r^2\cos 2\theta+a^4-b^4=0,$$

откуда

$$r^2=a^2\cos 2\theta\pm\sqrt{a^4\cos^2 2\theta-(a^4-b^4)}.$$

Случаи, соответствующие $a^2<b^2$ и $a^2>b^2$, изображены на черт. 112, причем второму случаю соответствует кривая, состоящая из двух отдельных замкнутых кривых. Мы рассмотрим более подробно лишь тот важный случай, когда $a^2=b^2$. Соответствующая кривая называется *лемнискатой*, и ее уравнение будет:

$$r^2=2a^2\cos 2\theta.$$



Черт. 113.

Уравнение это дает вещественные значения для r, только когда $\cos 2\theta\geqslant 0$, т. е. когда θ лежит в одном из промежутков:

$$\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right),\ \left(\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right),\ \left(\frac{7\pi}{4},\ 2\pi\right),$$

причем r обращается в нуль при

$$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}.$$

Нетрудно на основании этих соображений построить кривую (черт. 113).

В точке O кривая будет пересекать самое себя, и пунктирные прямые представляют собою касательные к двум ветвям кривой, пересекающимся

в точке O. Дифференцируя обе части уравнения лемнискаты по θ, получим:

$$2rr' = -4a^2 \sin 2\theta \text{ или } r' = -\frac{2a^2 \sin 2\theta}{r},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r}{r'} = -\frac{r^2}{2a^2 \sin 2\theta} = -\frac{2a^2 \cos 2\theta}{2a^2 \sin 2\theta} = -\operatorname{ctg} 2\theta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right),$$

$$\mu = \frac{\pi}{2} + 2\theta.$$

Переходя от полярных координат к прямоугольным, из формулы (39) имеем:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r}.$$

Уравнение лемнискаты можно написать в виде:

$$r^2 = 2a^2 (\cos^2\theta - \sin^2\theta);$$

подставляя предыдущие выражения, получим уравнение лемнискаты в прямоугольных координатах:

$$x^2 + y^2 = 2a^2 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{или} \quad (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2),$$

откуда видно, что лемниската есть алгебраическая кривая четвертого порядка.

ГЛАВА III

ПОНЯТИЕ ОБ ИНТЕГРАЛЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 8. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

86. Понятие о неопределенном интеграле. Одной из основных задач дифференциального исчисления является задача нахождения производной или дифференциала данной функции.

Первой основной задачей интегрального исчисления является обратная задача — отыскание функции по заданной ее производной или дифференциалу.

Пусть дана производная

$$y' = f(x)$$

или дифференциал

$$dy = f(x)\,dx$$

неизвестной функции y.

Функция $F(x)$, имеющая данную функцию $f(x)$ своей производной или $f(x)\,dx$ своим дифференциалом, называется первообразной данной функции $f(x)$.

Если, например,

$$f(x) = x^2,$$

то первообразной функцией будет, например, $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Действительно,

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2.$$

Допустим, что мы нашли какую-нибудь первообразную $F(x)$ функцию данной функции $f(x)$, которая имеет $f(x)$ своей производной, т. е. удовлетворяет соотношению

$$F'(x) = f(x).$$

Так как производная от произвольной постоянной C равна нулю, мы имеем также:

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x),$$

т. е. наряду с $F(x)$ и функция $F(x) + C$ есть также первообразная функция для $f(x)$.

Отсюда следует, что если задача нахождения первообразной функции имеет хоть одно решение, то она имеет и бесчисленное множество других решений, отличающихся от упомянутого на произвольное постоянное слагаемое. Можно, однако, показать, что этим и исчерпываются все решения задачи, а именно:

Если $F(x)$ есть какая-либо из первообразных функций для данной функции $f(x)$, то любая другая первообразная функция имеет вид:

$$F(x)+C,$$

где C есть произвольная постоянная.

В самом деле, пусть $F_1(x)$ есть любая функция, имеющая $f(x)$ своей производной. Мы имеем:

$$F_1'(x)=f(x).$$

С другой стороны, и рассматриваемая функция $F(x)$ имеет $f(x)$ своей производной, т. е.

$$F'(x)=f(x).$$

Вычитая это равенство из предыдущего, получаем:

$$F_1'(x)-F'(x)=[F_1(x)-F(x)]'=0,$$

откуда, в силу известной теоремы [63]:

$$F_1(x)-F(x)=C,$$

где C есть постоянная, что и требовалось доказать.

Полученный нами результат можно еще формулировать так: *если производные (или дифференциалы) двух функций тождественно равны, то сами функции отличаются лишь постоянным слагаемым.*

Самое общее выражение для первообразной функции называется также неопределенным интегралом от данной функции $f(x)$ или от данного дифференциала $f(x)\,dx$ и обозначается символом:

$$\int f(x)\,dx,$$

причем функция $f(x)$ называется подинтегральной функцией, а $f(x)\,dx$ — подинтегральным выражением.

Найдя какую-нибудь первообразную функцию $F(x)$, в силу доказанного выше можем написать:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

где C есть произвольная постоянная.

Приведем механическое и геометрическое истолкование неопределенного интеграла. Пусть у нас имеется закон аналитической зависимости скорости от времени:

$$v=f(t)$$

и требуется найти выражение пути s от времени. Так как скорость движения точки по заданной траектории есть производная $\frac{ds}{dt}$ от пути по времени, то задача сводится к нахождению первообразной данной функции $f(t)$, т. е.

$$s = \int f(t)\,dt.$$

Мы получаем бесчисленное множество решений, отличающихся на постоянное слагаемое. Эта неопределенность ответа имеет место вследствие того, что мы не фиксировали того места, от которого отсчитываем пройденный путь s. Если, например, $v = gt + v_0$ (равномерно ускоренное движение), то для s мы получим выражение:

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + C, \tag{1}$$

ибо, как нетрудно проверить, производная выражения (1) по t совпадает с заданным выражением $v = gt + v_0$. Если мы согласимся отсчитывать s от той точки, которая соответствует значению $t = 0$, т. е. если согласимся считать $s = 0$ при $t = 0$, то мы должны будем в формуле (1) положить постоянную $C = 0$. В предыдущих рассуждениях мы обозначили независимую переменную не буквой x, а буквой t, что, конечно, не имеет существенного значения.

Перейдем теперь к геометрическому истолкованию задачи нахождения первообразной функции. Соотношение $y' = f(x)$ показывает, что график искомой первообразной функции, или, как говорят, интегральная кривая

$$y = F(x),$$

есть кривая, касательная к которой при любом значении x имеет заданное направление, определяемое угловым коэффициентом

$$y' = f(x). \tag{2}$$

Черт. 114.

Иными словами, при любом значении независимой переменной x соотношением (2) задано направление касательной к кривой и требуется найти эту кривую. Если построена одна такая интегральная кривая, то все кривые, которые мы получим, передвигая ее на любой отрезок параллельно оси OY, будут иметь при одном и том же значении x параллельные касательные с тем же угловым коэффициентом $y' = f(x)$ (черт. 114), что и исходная кривая. Упомянутый параллельный перенос равносилен прибавлению к ординатам кривой постоянного слагаемого C, и общее уравнение кривых, отвечающих задаче, будет:

$$y = F(x) + C. \tag{3}$$

Для того чтобы вполне определить положение искомой интегральной кривой, т. е. выражение искомой первообразной функции, нужно задать еще какую-нибудь точку, через которую интегральная кривая должна пройти, хотя бы точку пересечения ее с некоторой прямой

$$x = x_0,$$

параллельной оси OY. Такое задание равносильно заданию начального значения y_0 искомой функции $y = F(x)$, которое она должна иметь при заданном значении $x = x_0$. Подставляя эти начальные значения в уравнение (3), мы получим уравнение для определения произвольной постоянной C:

$$y_0 = F(x_0) + C,$$

и окончательно первообразная функция, удовлетворяющая поставленному начальному условию, будет иметь вид:

$$y = F(x) + [y_0 - F(x_0)].$$

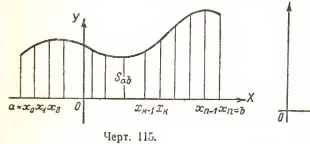
Прежде чем выяснить свойства неопределенного интеграла и способы нахождения первообразной функции, мы изложим вторую основную задачу интегрального исчисления, и выясним ее связь с формулированной уже нами первой задачей — задачей нахождения первообразной функции. Существенным для дальнейшего является новое понятие, а именно понятие определенного интеграла. Для того чтобы естественно прийти к этому новому понятию, мы будем исходить из интуитивного представления площади. Оно же будет служить нам и для выяснения связи между понятием определенного интеграла и понятием первообразной функции. Таким образом, рассуждения следующих двух номеров, основанные на интуитивном представлении площади, не являются строгими доказательствами новых фактов. Логически строгая схема построения основ интегрального исчисления указана в конце [88]. Она приведена полностью в конце настоящей главы.

87. Определенный интеграл как предел суммы. Отметим на плоскости XOY график функции $f(x)$, причем мы считаем, что этот график представляет собою непрерывную кривую, лежащую целиком над осью OX, т. е. считаем, что все ординаты этого графика положительны. Рассмотрим площадь S_{ab}, ограниченную осью OX, этим графиком и двумя ординатами $x = a$ и $x = b$ (черт. 115), и постараемся найти величину этой площади. Разобьем для этого промежуток (a, b) на n частей в точках:

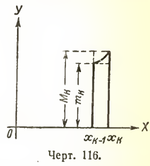
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Рассматриваемая площадь S_{ab} разобьется на n вертикальных полос, причем k-я полоса имеет основание длины $(x_k - x_{k-1})$. Обозначим

через m_k и M_k соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ в промежутке (x_{k-1}, x_k), т. е. наименьшую и наибольшую ординаты нашего графика в этом промежутке. Площадь полоски лежит между площадями двух прямоугольников с общим основанием (x_{k-1}, x_k) (черт. 116) и с высотами m_k и M_k. Эти прямоугольники являются входящим и выходящим прямоугольниками для



Черт. 115.



Черт. 116.

k-й полоски. Таким образом, величина площади k-й полоски заключается между площадями упомянутых двух прямоугольников, т. е. между двумя числами:

$$m_k(x_k - x_{k-1}) \quad \text{и} \quad M_k(x_k - x_{k-1}),$$

а потому вся рассматриваемая площадь S_{ab} будет лежать между суммами площадей упомянутых входящих и выходящих прямоугольников, т. е. вся площадь S_{ab} будет лежать между суммами:

$$\begin{aligned} s_n = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_k(x_k - x_{k-1}) + \ldots + \\ + m_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) + m_n(x_n - x_{n-1}), \quad (4) \\ S_n = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_k(x_k - x_{k-1}) + \ldots + \\ + M_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) + M_n(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

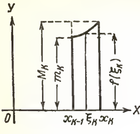
Таким образом, мы имеем неравенство:

$$s_n \leqslant S_{ab} \leqslant S_n. \quad (5)$$

Построим теперь вместо входящего и выходящего прямоугольников для каждой полоски какой-либо средний прямоугольник, принимая, как всегда, за основание $(x_k - x_{k-1})$ и взяв за высоту какую-либо ординату $f(\xi_k)$ нашего графика, соответствующую любой точке ξ_k из промежутка (x_{k-1}, x_k) (черт. 117). Рассмотрим сумму площадей этих *средних* прямоугольников:

$$\begin{aligned} S'_n = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \\ + \ldots + f(\xi_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2}) + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}). \quad (6) \end{aligned}$$

Она, так же как и площадь S_{ab}, будет заключаться между суммами площадей входящих и выходящих прямоугольников, т. е. мы будем иметь неравенство



Черт. 117.

$$s_n \leqslant S'_n \leqslant S_n. \qquad (7)$$

Будем теперь беспредельно увеличивать число n делений промежутка (a, b) и притом так, чтобы наибольшая из разностей $(x_k - x_{k-1})$, стремилась к нулю. Так как функция $f(x)$ по условию непрерывна, то разность $(M_k - m_k)$ между наибольшим и наименьшим ее значениями в промежутке (x_{k-1}, x_k) будет стремиться к нулю при беспредельном уменьшении длины этого промежутка, независимо от его положения в основном промежутке (a, b) (свойство непрерывной функции [35]). Таким образом, если мы обозначим через ε_n наибольшую из разностей:

$$(M_1 - m_1),\ (M_2 - m_2),\ \ldots,\ (M_k - m_k), \ldots,\ (M_{n-1} - m_{n-1}),\ (M_n - m_n),$$

то, в силу сказанного, при упомянутом выше предельном переходе число ε_n будет стремиться к нулю. Определим теперь разность между суммой площадей выходящих прямоугольников и суммой площадей входящих прямоугольников:

$$S_n - s_n = (M_1 - m_1)(x_1 - x_0) + (M_2 - m_2)(x_2 - x_1) + \ldots + \\ + (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) + \ldots + (M_n - m_n)(x_n - x_{n-1}),$$

откуда, заменяя все разности $(M_k - m_k)$ наибольшей ε_n и помня, что все разности $(x_k - x_{k-1})$ — положительны:

$$S_n - s_n \leqslant \varepsilon_n (x_1 - x_0) + \varepsilon_n (x_2 - x_1) + \ldots + \varepsilon_n (x_k - x_{k-1}) + \ldots + \\ + \varepsilon_n (x_n - x_{n-1}),$$

т. е.

$$S_n - s_n \leqslant \varepsilon_n [(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_k - x_{k-1}) + \ldots + \\ + (x_n - x_{n-1})] = \varepsilon_n (x_n - x_0) = \varepsilon_n (b - a).$$

Мы можем, таким образом, написать:

$$0 \leqslant S_n - s_n \leqslant \varepsilon_n (b - a),$$

т. е.

$$\lim_{n \to \infty} (S_n - s_n) = 0. \qquad (8)$$

С другой стороны, при всяком n мы имели:

$$s_n \leqslant S_{ab} \leqslant S_n \qquad (9)$$

и величина площади S_{ab} есть определенное число. Из формул (8) и (9) непосредственно следует, что величина площади S_{ab} является общим пределом s_n и S_n, т. е. площадей выходящих и входящих прямоугольников:

$$\lim s_n = \lim S_n = S_{ab}.$$

Так как, с другой стороны, сумма средних прямоугольников S'_n, как мы видели, лежит между s_n и S_n, то и она должна стремиться к площади S_{ab}, т. е.

$$\lim S'_n = S_{ab}.$$

Эта сумма S'_n является более общей по сравнению с суммами s_n и S_n, так как в ней мы можем произвольно выбирать ξ_k из промежутка (x_{k-1}, x_k) и, в частности, можем брать $f(\xi_k)$ равной наименьшей ординате m_k или наибольшей M_k.

При таком выборе сумма S'_n превращается в суммы s_n и S_n.

Предыдущие рассуждения приводят нас к следующему:

Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b) и если мы, разбив этот промежуток на n частей в точках:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

и обозначив через $x = \xi_k$ любое значение из промежутка (x_{k-1}, x_k), вычислим соответствующее значение функции $f(\xi_k)$ и составим сумму:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}),\ [1] \qquad (10)$$

то при беспредельном возрастании числа делений n промежутка и беспредельном уменьшении наибольшей из разностей $(x_k - x_{k-1})$ эта сумма стремится к определенному пределу. Предел этот равен площади, ограниченной осью OX, графиком функции $f(x)$ и двумя ординатами: $x = a$, $x = b$.

Упомянутый предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$, взятым по переменной x между нижним пределом $x = a$ и верхним $x = b$, и обозначается следующим символом:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Заметим, что существование предела I суммы (10) при беспредельном уменьшении наибольшей из разностей $(x_k - x_{k-1})$, сводится

---

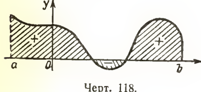
[1] Знак $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ есть сокращенное обозначение суммы (6).

к следующему утверждению: при любом заданном положительном ε существует такое положительное δ, что

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

при любом выборе точек ξ_k из промежутка (x_{k-1}, x_k), если только все (положительные) разности $x_k - x_{k-1} < \delta$. Этот предел I и является определенным интегралом.

Выше мы предполагали, что график функции $f(x)$ находится целиком над осью OX, т. е. что все ординаты этого графика положительны. Рассмотрим теперь общий случай, при котором некоторые части этого графика находятся над осью, а другие под осью OX (черт. 118).



Черт. 118.

Если мы и в этом случае составим сумму (6), то слагаемые $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$, соответствующие частям графика, лежащим под осью OX, будут отрицательными, так как разность $(x_k - x_{k-1})$ положительна и ордината $f(\xi_k)$ — отрицательна.

После перехода к пределу получится определенный интеграл, который будет учитывать площади, находящиеся над осью OX со знаком (+) и под осью OX со знаком (—), т. е. в этом общем случае *определенный интеграл*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

будет давать алгебраическую сумму площадей, заключенных между осью OX, графиком функции $f(x)$ и ординатами $x = a$ и $x = b$. При этом площади над осью OX будут получаться с положительным знаком, а под осью OX — с отрицательным.

Как мы увидим в дальнейшем, мы приходим к нахождению предела суммы вида (6) не только в вопросе вычисления площади, но и во многих, весьма разнообразных, других задачах естествознания. Приведем только один пример. Пусть некоторая точка M передвигается по оси OX от абсциссы $x = a$ к абсциссе $x = b$, и на нее действует некоторая сила T, направленная также по оси OX. Если сила T постоянная, то работа, которую она совершает при передвижении точки из положения $x = a$ в положение $x = b$, определяется произведением $R = T \cdot (b - a)$, т. е. произведением величины силы на пройденный точкой путь. Если сила T — переменная, то написанная формула больше неприменима. Положим, что вели-

чина силы зависит от положения точки на оси OX, т. е. является функцией абсциссы точки $T=f(x)$.

Чтобы вычислить работу в этом случае, разобьем весь путь, пройденный точкой, на определенные части:

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

и рассмотрим одну из этих частей (x_{k-1}, x_k). С ошибкой тем меньшей, чем меньше длина (x_k-x_{k-1}), мы можем считать, что сила, действовавшая на точку при передвижении ее от x_{k-1} к x_k, постоянна и совпадает со значением этой силы $f(\xi_k)$ в некоторой точке ξ_k из промежутка (x_{k-1}, x_k). Поэтому для работы на участке (x_{k-1}, x_k) мы получим приближенное выражение:

$$R_k \sim f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}),$$

и для всей работы будем иметь приближенное пока выражение вида:

$$R \sim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}).$$

При беспредельном увеличении числа делений n и беспредельном уменьшении наибольшей из разностей (x_k-x_{k-1}) мы получим в пределе определенный интеграл, дающий точную величину искомой работы:

$$R=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Отвлекаясь от каких бы то ни было геометрических или механических истолкований, мы можем теперь установить понятие об определенном интеграле от функции $f(x)$ по промежутку $a \leqslant x \leqslant b$ как о пределе суммы вида (6). Второй основной задачей интегрального исчисления и является изучение свойств определенного интеграла и, прежде всего, его вычисление. Если $f(x)$ — заданная функция, а $x=a$ и $x=b$ — заданные числа, то определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

есть некоторое определенное число. Знак $\int$ представляет собою стилизованную букву S и должен напоминать о той сумме, которая при предельном переходе дала величину определенного интеграла. Подинтегральное выражение $f(x)\,dx$ должно напоминать о виде слагаемых этой суммы, а именно о $f(\xi_k)\cdot(x_k-x_{k-1})$. Буква x, стоящая под знаком определенного интеграла, называется обычно *переменной*

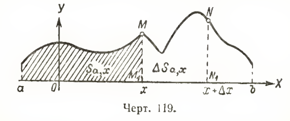
интегрирования. Отметим по поводу этой буквы одно важное обстоятельство. Величина интеграла, как мы уже упомянули, есть определенное число, не зависящее, конечно, от обозначения переменной интегрирования x, и мы можем в определенном интеграле обозначать переменную интегрирования любой буквой. Это не будет иметь, очевидно, никакого влияния на величину интеграла, которая зависит лишь от того, каковы ординаты графика $f(x)$ и пределы интегрирования a и b. Итак, обозначение независимой переменной никакой роли не играет, т. е., например:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Вторая задача интегрального исчисления — вычисление определенного интеграла — представляет собою на первый взгляд довольно сложную задачу составления суммы вида (6) и затем перехода к пределу. Заметим, что при этом предельном переходе число слагаемых в упомянутой сумме будет беспредельно расти, а каждое из них будет стремиться к нулю. Кроме того, на первый взгляд эта вторая задача интегрального исчисления не имеет никакой связи с первой задачей о нахождении первообразной функции для заданной функции $f(x)$.

В следующем номере мы покажем, что обе задачи тесно связаны одна с другой и что вычисление определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ совершается весьма просто, если известна первообразная функция для $f(x)$.

88. Связь определенного и неопределенного интегралов. Рассмотрим опять площадь S_{ab}, ограниченную осью OX, графиком функции $f(x)$ и ординатами $x=a$ и $x=b$. Вместе с этой площадью



Черт. 119.

рассмотрим и часть ее, ограниченную левой ординатой $x=a$ и некоторой подвижной ординатой, отвечающей переменному значению x (черт. 119). Величина этой площади S_{ax} будет, очевидно, зависеть от того, в каком месте мы поставим правую ординату, т. е. будет

функцией от x. Эта величина будет изображаться определенным интегралом от функции $f(x)$, взятым от нижнего предела a до верхнего предела x. Так как буква x занята для обозначения верхнего предела, то мы для избежания путаницы будем обозначать переменную интегрирования другой буквой, а именно, буквой t. Таким образом, мы можем написать:

$$S_{ax} = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{11}$$

Здесь мы имеем определенный интеграл с переменным верхним пределом x, и его величина есть, очевидно, функция этого предела. Покажем, что эта функция является одной из первообразных функций для $f(x)$. Для вычисления производной от этой функции рассмотрим сперва ее приращение ΔS_{ax}, соответствующее приращению Δx независимой переменной x. Очевидно, имеем (черт. 120):

$$\Delta S_{ax} = \text{площ. } M_1MNN_1.$$

Обозначим через m и M, соответственно, наименьшую и наибольшую ординаты графика $f(x)$ в промежутке $(x, x+\Delta x)$. Криволинейная фигура M_1MNN_1, начерченная в большом масштабе на черт. 120, будет целиком лежать внутри прямоугольника с высотой M и основанием Δx и будет заключать внутри себя прямоугольник с высотой m и тем же основанием, а потому

$$m\,\Delta x \leqslant \Delta S_{ax} \leqslant M\,\Delta x,$$

или, разделив на Δx:

$$m \leqslant \frac{\Delta S_{ax}}{\Delta x} \leqslant M.$$

Черт. 120.

Когда $\Delta x \to 0$, обе величины m и M в силу непрерывности функции $f(x)$ стремятся к общему пределу — ординате $M_1M = f(x)$ кривой в точке x, а потому

$$\lim \frac{\Delta S_{ax}}{\Delta x} = f(x),$$

что мы и хотели доказать. Полученный результат мы можем формулировать следующим образом: *определенный интеграл с переменным верхним пределом*

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

есть функция этого верхнего предела, производная от которой

равна подинтегральной функции $f(x)$ *при верхнем пределе.* Иначе говоря, *определенный интеграл с переменным верхним пределом есть первообразная функция для подинтегральной функции.*

Установив связь между понятиями определенного и неопределенного интегралов, покажем теперь, каким образом можно вычислять величину определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

если известна какая-либо первообразная функция $F(x)$ для $f(x)$. Как мы показали, определенный интеграл с переменным верхним пределом есть тоже первообразная функция для $f(x)$, и в силу [86] можем написать:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C, \tag{12}$$

где C есть некоторая постоянная. Для определения этой постоянной заметим, что если у площади S_{ax} правая ордината совпадает с левой, т. е. $x = a$, то величина площади обращается, очевидно, в нуль, т. е. левая часть в формуле (12) обращается в нуль при $x = a$. Следовательно, тождество это при $x = a$ дает:

$$0 = F(a) + C, \quad \text{т. е.} \quad C = -F(a).$$

Подставляя найденное значение C в (12), получим:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Наконец, полагая здесь $x = b$, будем иметь:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{13}$$

Мы приходим, таким образом, к следующему основному правилу, выражающему величину определенного интеграла через значение первообразной функции: *величина определенного интеграла равна разности значений первообразной функции для подинтегральной функции при верхнем и нижнем пределах интегрирования.*

Формулированное правило показывает, что нахождение первообразной функции, т. е. решение первой задачи интегрального исчисления, решает и вторую задачу, т. е. вычисление определенного интеграла, и освобождает, таким образом, нас при вычислении определенного интеграла от сложных операций образования суммы (6) и перехода к пределу.

В качестве примера найдем определенный интеграл

$$\int_0^1 x^2\,dx.$$

Первообразной функцией для x^2 является функция $\frac{1}{3}x^3$ [86].

Пользуясь выведенным нами правилом, будем иметь:[1]

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}.$$

Если бы мы, не пользуясь первообразной функцией, стали вычислять предложенный определенный интеграл непосредственно из его определения как предела суммы, то пришли бы к гораздо более сложному вычислению, которое вкратце воспроизведем. Разобьем промежуток (0, 1) на n равных частей точками:

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < 1.$$

В данном случае мы имеем n следующих промежутков:

$$\left(0, \frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \left(\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right), \ldots, \left(\frac{n-1}{n}, 1\right),$$

длина каждого из которых равна $\frac{1}{n}$. При составлении суммы (6) примем за ξ_k левый конец промежутка, т. е.

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \frac{1}{n}, \quad \xi_3 = \frac{2}{n}, \ldots, \quad \xi_n = \frac{n-1}{n}.$$

Все разности $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$, и, замечая, что значения подинтегральной функции $f(x) = x^2$ на левых концах промежутков будут:

$$f(\xi_1) = 0, \quad f(\xi_2) = \frac{1}{n^2}, \quad f(\xi_3) = \frac{2^2}{n^2}, \quad \ldots, \quad f(\xi_n) = \frac{(n-1)^2}{n^2},$$

можем написать:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[0\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{2^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1^2 + 2^2 \ldots + (n-1)^2}{n^3}. \qquad (14)$$

Для вычисления суммы, стоящей в числителе, напишем ряд очевидных равенств:

$$(1+1)^3 = 1 + 3\cdot 1 + 3\cdot 1^2 + 1^3$$
$$(1+2)^3 = 1 + 3\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 2^3$$
$$(1+3)^3 = 1 + 3\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + 3^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[1 + (n-1)]^3 = 1 + 3(n-1) + 3(n-1)^2 + (n-1)^3.$$

---

[1]) Символ $\varphi(x)\Big|_a^b$ обозначает разность $[\varphi(b) - \varphi(a)]$.

Складывая почленно, получим:

$$2^3+3^3+\ldots+n^3=(n-1)+3[1+2+\ldots+(n-1)]+ \\ +3[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2]+1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3.$$

Производя сокращения и применяя формулу суммы арифметической прогрессии, можем написать:

$$n^3=(n-1)+3\frac{n(n-1)}{2}+3[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2]+1,$$

откуда

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{n^3-n}{3}-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Подставив полученное выражение в (14), имеем:

$$\int_0^1 x^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Уяснив основные задачи интегрального исчисления и связь между ними, мы посвятим следующий номер дальнейшему рассмотрению первой задачи интегрального исчисления, а именно задаче выяснения свойств неопределенного интеграла и его разыскания.

Наши предыдущие рассуждения об определенном интеграле основывались на чисто геометрических соображениях, а именно на рассмотрении площадей S_{ab} и S_{ax}. В частности, доказательство основного факта, что сумма (6) имеет предел, исходило из допущения, что для всякой непрерывной кривой имеется определенная площадь S_{ab}. При всей наглядности такого допущения оно не является строго обоснованным, и единственно математически строгий путь был бы обратный: не опираясь на геометрическую интерпретацию, доказать непосредственно аналитическим путем существование предела S суммы

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}),$$

каковой потом уже принять за определение площади S_{ab}. Это доказательство мы приведем в конце настоящей главы и притом при более общих предположениях относительно функции $f(x)$, чем ее непрерывность.

Заметим еще, что геометрическая интерпретация являлась существенным моментом и при доказательстве того основного предложения, что при непрерывности подинтегральной функции производная от определенного интеграла по верхнему пределу равна подинтегральной функции при верхнем пределе. В следующем параграфе настоящей главы мы приведем и строгое аналитическое доказательство этого предложения. Оно, совместно с доказательством существования определенного интеграла от непрерывной функции, позволяет

утверждать, что для всякой непрерывной функции имеется первообразная, т. е. неопределенный интеграл. Дальше мы выясним основные свойства неопределенного интеграла, и будем считать, что имеем дело лишь с непрерывными функциями.

При изложении свойств определенного интеграла мы строго докажем основную формулу (13). Таким образом, единственным недоказанным фактом останется факт существования предела суммы (10) для непрерывной функции $f(x)$. Это доказательство, как мы уже сказали, приводится в конце главы.

89. Свойства неопределенного интеграла. В [86] мы видели, что две первообразные функции для одной и той же функции отличаются лишь постоянным слагаемым. Это приводит нас к первому свойству неопределенного интеграла:

I. *Если две функции или два дифференциала тождественны, то неопределенные интегралы от них могут отличаться лишь на постоянное слагаемое.*

Наоборот, *чтобы проверить, что две функции отличаются постоянным слагаемым, достаточно показать, что их производные (или дифференциалы) тождественны.*

Следующие свойства II и III непосредственно вытекают из понятия о неопределенном интеграле как первообразной функции, т. е. из того, что *неопределенный интеграл*

$$\int f(x)\,dx$$

есть такая функция, производная которой по x *равна подынтегральной функции* $f(x)$, *или дифференциал которой равен подынтегральному выражению* $f(x)\,dx$.

II. *Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал — подынтегральному выражению:*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'_x = f(x); \quad d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx. \qquad (15)$$

III. Одновременно с (15) мы имеем:

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C,$$

и эту формулу можно еще переписать так [50]:

$$\int dF(x) = F(x) + C, \qquad (16)$$

что в соединении со свойством II дает: *рядом стоящие знаки* d и $\int$, *в каком бы порядке они не следовали, взаимно уничтожаются,*

если условиться отбрасывать произвольную постоянную в равенстве между неопределенными интегралами.

IV. *Постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла:*

$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx + C.^{1)} \tag{17}$$

V. *Интеграл от алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов от каждого слагаемого:*

$$\int (u + v - w + \ldots)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx - \int w\,dx + \ldots + C. \tag{18}$$

Правильность формул (17) и (18) нетрудно обнаружить, дифференцируя обе части и убеждаясь в тождественности полученных производных. Например, для равенства (17):

$$\left(\int Af(x)\,dx\right)' = Af(x);$$
$$\left(A\int f(x)\,dx + C\right)' = A\left(\int f(x)\,dx\right)' = Af(x).$$

90. Таблица простейших интегралов. Для получения этой таблицы достаточно прочесть в обратном порядке таблицу простейших производных [49], после чего мы получим:

$$\int dx = x + C,$$
$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \text{ если } m \neq -1,$$
$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C,$$
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C,$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

Для проверки этой таблицы достаточно установить, что производная правой части равенства тождественна с подинтегральной функцией

[1]) Иногда не пишут произвольного постоянного слагаемого после неопределенного интеграла, подразумевая, что неопределенный интеграл уже содержит такое слагаемое. Равенство (17) при этом будет

$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx.$$

левой части. Вообще, зная ту функцию, от которой данная функция $f(x)$ есть производная, мы тем самым получаем ее неопределенный интеграл. Но обыкновенно, даже в самых простых случаях, заданные функции не находятся в таблице производных, что и делает задачу интегрального исчисления гораздо более трудной, чем задачу дифференциального исчисления. Все дело приводится к преобразованию данного интеграла к таким, которые заключаются в таблице простейших.

Преобразование это требует навыка и практики и облегчается применением нижеследующих основных правил интегрального исчисления.

91. Правило интегрирования по частям. Мы знаем, что если u, v — две какие угодно функции от x с непрерывными производными, то [**50**]:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du, \quad \text{или} \quad u\,dv = d(uv) - v\,du.$$

В силу свойств I, V и III мы заключаем отсюда:

$$\int u\,dv = \int [d(uv) - v\,du] + C = \int d(uv) - \int v\,du + C = uv - \int v\,du + C,$$

что и дает формулу интегрирования по частям:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du + C. \tag{19}$$

Она сводит вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$, причем этот последний может оказаться более простым.

Примеры.

1. $\int \log x\,dx$.

Полагая здесь

$$u = \log x, \quad dx = dv,$$

имеем прежде всего:

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = x,$$

откуда в силу (19):

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int x\frac{dx}{x} + C = x\log x - x + C.$$

На практике отдельные преобразования выписывать не нужно; все действия производятся по возможности в уме.

2. $\int e^x x^2\,dx = \int x^2 \cdot e^x dx = \int x^2\,de^x = x^2e^x - \int e^x\,dx^2 = x^2e^x - 2\int e^x x\,dx,$

$$\int e^x x\,dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx = e^x x - e^x,$$

что дает окончательно

$$\int e^x x^2\,dx = e^x[x^2-2x+2]+C.$$

3. $\int \sin x\cdot x^3\,dx = \int x^3\cdot\sin x\,dx = \int x^3 d(-\cos x) =$

$= -x^3\cos x - \int(-\cos x)\,dx^3 = -x^3\cos x + 3\int x^2\cdot\cos x\,dx =$

$= -x^3\cos x + 3\int x^2 d\sin x = -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 3\int \sin x\,dx^2 =$

$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 6\int x\sin x\,dx =$

$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 6\int x d(-\cos x) =$

$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\int\cos x\,dx =$

$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C.$

Способ, показанный в этих примерах, применяется, вообще, при вычислении интегралов типа:

$$\int \log x\cdot x^m\,dx,\quad \int e^{ax}x^m\,dx,\quad \int \sin bx\cdot x^m dx,\quad \int \cos bx\cdot x^m\,dx,$$

где m есть любое целое положительное число; нужно заботиться лишь о том, чтобы при последовательных преобразованиях степень x все время понижалась, пока не дойдет до нулевой.

92. Правило замены переменных. Примеры. Интеграл $\int f(x)\,dx$ часто можно упростить, введя вместо x новую переменную t, положив

$$x = \varphi(t). \tag{20}$$

Для преобразования неопределенного интеграла к новой переменной t по формуле (20) *достаточно преобразовать к новой переменной его подинтегральное выражение:*

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt + C. \tag{21}$$

Для доказательства в силу свойства I [89] нам достаточно установить совпадение между дифференциалами от левой и правой частей формулы (21). Произведя дифференцирование, имеем:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

$$d\left(\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt\right) = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Часто вместо подстановки (20) употребляют обратную:

$$t = \psi(x) \quad\text{и}\quad \psi'(x)\,dx = dt.$$

Примеры.

1. $\int (ax+b)^m\,dx$ (при $m \neq -1$).

Для упрощения интеграла полагаем:

$$ax+b=t,\quad a\,dx=dt,\quad dx=\frac{dt}{a}.$$

Подставив это в данный интеграл, находим:

$$\int (ax+b)^m\,dx=\frac{1}{a}\int t^m\,dt=\frac{1}{a}\,\frac{t^{m+1}}{m+1}+C=\frac{1}{a}\,\frac{(ax+b)^{m+1}}{m+1}+C.$$

2. $$\int \frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{a}\log t+C=\frac{\log(ax+b)}{a}+C.$$

3. $$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{dx}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C$$

$$\left(\text{подстановка } t=\frac{x}{a}\right).$$

4. $$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

5. $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Для вычисления этого интеграла употребляется подстановка Эйлера, о которой более подробно сказано ниже. Новая переменная t вводится здесь по формуле:

$$\sqrt{x^2+a}=t-x,\quad t=x+\sqrt{x^2+a}.$$

Для определения x и dx возвышаем в квадрат:

$$x^2+a=t^2-2tx+x^2,\quad x=\frac{t^2-a}{2t}=\frac{1}{2}\left(t-\frac{a}{t}\right),$$

$$\sqrt{x^2+a}=t-\frac{t^2-a}{2t}=\frac{t^2+a}{2t},$$

$$dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{t^2}\right)dt=\frac{1}{2}\,\frac{t^2+a}{t^2}\,dt.$$

Подставив все это в данный интеграл, имеем:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{2t}{t^2+a}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{t^2+a}{t^2}\,dt=$$

$$=\int\frac{dt}{t}=\log t+C=\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)+C.$$

6. Интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$$

вычисляется при помощи особого приема, с которым мы познакомимся подробнее позже, а именно при помощи *разложения подинтегральной функции на простейшие дроби.*

Разложив знаменатель подинтегральной функции на множители:

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a),$$

представим ее в виде суммы более простых дробей:

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}.$$

Для определения постоянных A и B освобождаемся от знаменателя, что дает тождество:

$$1=A(x+a)+B(x-a)=(A+B)x+a(A-B),$$

которое должно иметь место при всех значениях x. Оно будет выполнено, если определим A и B из условий

$$a(A-B)=1, \quad A+B=0, \quad A=-B=\frac{1}{2a}.$$

Итак, имеем:

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right],$$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right]=$$

$$=\frac{1}{2a}[\log(x-a)-\log(x+a)]+C=\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}+C.$$

7. Интегралы более общего вида:

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}\,dx$$

приводятся к разобранным уже раньше, если в знаменателе подинтегральной функции *выделить полный квадрат.* Имеем:

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

Полагаем далее:

$$x+\frac{p}{2}=t, \quad x=t-\frac{p}{2}, \quad dx=dt,$$

что дает:

$$mx+n=m\left(t-\frac{p}{2}\right)+n=At+B,$$

где мы положили $A=m$ и $B=n-\frac{mp}{2}$.

Положив, наконец,

$$q-\frac{p^2}{4}=\pm a^2,$$

где знак (+) или (—) нужно взять в зависимости от знака левой части этого равенства и a считается положительным, мы можем переписать данный интеграл в виде:

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}\,dx=\int\frac{At+B}{t^2\pm a^2}\,dt=A\int\frac{t\,dt}{t^2\pm a^2}+B\int\frac{dt}{t^2\pm a^2}.$$

Первый из этих интегралов вычисляется сразу, если положить:

$$t^2 \pm a^2 = z; \quad 2t\,dt = dz,$$

что дает:

$$\int \frac{t\,dt}{t^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\log z = \frac{1}{2}\log(t^2 \pm a^2).$$

Второй же интеграл имеет вид, разобранный в примерах 3 (+) и 6 (—).

8. Интегралы вида:

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx$$

приводятся к разобранным выше тем же приемом выделения полного квадрата. Применяя обозначения примера 7, можем переписать данный интеграл в виде:

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx = \int \frac{At+B}{\sqrt{t^2+b}}\,dt =$$
$$= A\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+b}} + B\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+b}} \left(b = \pm a^2 = q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Первый из этих интегралов вычисляется при помощи подстановки

$$t^2 + b = z^2, \quad 2t\,dt = 2z\,dz,$$

которая дает:

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+b}} = \int \frac{z\,dz}{z} = \int dz = z = \sqrt{t^2+b}.$$

Второй интеграл уже разобран в примере 5 и равен $\log(t+\sqrt{t^2+b})$.

9. Аналогичным приемом выделения полного квадрата интеграл

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{q+px-x^2}}\,dx$$

можно привести к виду:

$$A_1\int \frac{t\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}} + B_1\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}},$$

и имеем:

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = -\sqrt{a^2-t^2} + C$$

при помощи подстановки $a^2 - t^2 = z^2$. Второй интеграл разобран в примере 4.

10. $$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C =$$
$$= \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C.$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C =$$
$$= \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + C.$$

11. Интеграл

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx$$

приводится к разобранному уже при помощи интегрирования по частям:

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int x\cdot d\sqrt{x^2+a} =$$
$$= x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\,dx.$$

Прибавив и вычтя a в числителе подинтегральной функции последнего интеграла, перепишем предыдущее равенство в виде:

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,dx + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},$$

или

$$2\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},$$

откуда окончательно:

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a} + a\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)\right] + C.$$

93. Примеры дифференциальных уравнений первого порядка. В [51] мы рассматривали простейшие дифференциальные уравнения. Самое общее дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$F(x,\ y,\ y') = 0.$$

Это есть соотношение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию y и ее первую производную y'. Обыкновенно можно решить это уравнение относительно y' и переписать его в виде:

$$y' = f(x,\ y),$$

где $f(x, y)$ есть известная функция от x и y.

Не рассматривая этого уравнения в общем случае, что будет сделано во втором томе, остановимся лишь на некоторых простейших примерах.

Уравнение с разделяющимися переменными, — когда функция $f(x, y)$ представляется в виде отношения двух функций, из которых одна зависит только от x, а другая только от y:

$$y' = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}. \tag{22}$$

Помня, что $y' = \frac{dy}{dx}$, можем переписать это уравнение в виде:

$$\psi(y)\,dy = \varphi(x)\,dx,$$

так что в одну часть уравнения входит только буква x, в другую — только буква y; это преобразование и называется *разделением переменных*. Так как

$$\psi(y)\,dy = d\int \psi(y)\,dy,\quad \varphi(x)\,dx = d\int \varphi(x)\,dx,$$

в силу свойства I [89] получаем:

$$\int \psi(y)\,dy = \int \varphi(x)\,dx + C, \tag{23}$$

откуда и можно, взяв интегралы, определить искомую функцию y.

Примеры. 1. *Химические реакции первого порядка.* Обозначив через a количество вещества, имевшегося к началу реакции, через x — количество вещества, вступившего в реакцию к моменту t, мы имеем [51] уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = c(a - x), \tag{24}$$

где c — постоянная реакции. Сверх того мы имеем условие:

$$x\Big|_{t=0} = 0. \tag{25}$$

Разделяя переменные, находим:

$$\frac{dx}{a - x} = c\,dt,$$

или, интегрируя:

$$\int \frac{dx}{a - x} = \int c\,dt + C_1; \quad -\log(a - x) = ct + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Отсюда выводим:

$$a - x = e^{-ct - C_1} = Ce^{-ct},$$

где $C = e^{-C_1}$ есть также произвольная постоянная. Ее можно определить из условия (25), в силу которого предыдущее равенство при $t = 0$ дает $a = C$, и окончательно

$$x = a(1 - e^{-ct}).$$

2. *Химические реакции второго порядка.* Пусть в растворе содержатся два вещества, количества которых к началу реакции, выраженные в грамм-молекулах, суть a и b. Допустим, что к моменту t в реакцию вступают равные количества обоих веществ, которые мы обозначим через x, так что количества оставшихся веществ будут $a - x$ и $b - x$.

По основному закону химических реакций второго порядка скорость течения реакции пропорциональна произведению этих оставшихся количеств, т. е.

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x).$$

Нужно интегрировать это уравнение, присоединив к нему еще начальное условие

$$x\Big|_{t=0} = 0.$$

Разделяя переменные, имеем:

$$\frac{dx}{(a - x)(b - x)} = k\,dt,$$

или, интегрируя,

$$\int \frac{dx}{(a - x)(b - x)} = kt + C_1, \tag{26}$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Для вычисления интеграла в левой части мы применим способ разложения на простейшие дроби (пример 6) [92]:

$$\frac{1}{(a - x)(b - x)} = \frac{A}{a - x} + \frac{B}{b - x},$$

$$1 = A(b - x) + B(a - x) = -(A + B)x + (Ab + Ba),$$

что дает:

$$-(A+B)=0;\quad Ab+Ba=1,$$

откуда

$$A=-B=\frac{1}{b-a},$$

так что

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)}=\frac{1}{b-a}\left[\int \frac{dx}{a-x}-\int \frac{dx}{b-x}\right]=\frac{1}{b-a}\log\frac{b-x}{a-x}.$$

Подставляя в (26), имеем:

$$\log\frac{b-x}{a-x}=(b-a)kt+(b-a)C_1,$$

$$\frac{b-x}{a-x}=Ce^{(b-a)kt},$$

где $C=e^{(b-a)C_1}$.

Искомая функция x определяется отсюда без всякого труда.

Предлагаем читателям разобрать особый случай $a=b$, когда предыдущие формулы теряют смысл.

3. *Найти все кривые, пересекающие под данным постоянным углом радиусы-векторы, проведенные из начала координат*[1] (черт. 121).

Пусть $M(x, y)$ есть точка искомой кривой. Из чертежа мы имеем:

$$\omega=\alpha-\theta,$$

$$\operatorname{tg}\omega=\operatorname{tg}(\alpha-\theta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}=\frac{y'-\dfrac{y}{x}}{1+y'\dfrac{y}{x}}.$$

Черт. 121.

Обозначив для удобства вычислений

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{1}{a}$$

и освобождаясь от знаменателей, перепишем полученное дифференциальное уравнение в виде:

$$x+yy'=a(y'x-y)$$

или, умножив обе части на dx:

$$x\,dx+y\,dy=a(x\,dy-y\,dx). \tag{27}$$

Это уравнение интегрируется весьма просто, если перейти от прямоугольных координат x, y к полярным r, θ, приняв ось OX за полярную ось и начало координат O за полюс. Мы имеем [82]:

$$x^2+y^2=r^2,\quad \theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

что дает:

$$x\,dx+y\,dy=r\,dr,\qquad d\theta=\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\,d\,\frac{y}{x}=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}.$$

[1]) Вообще углом между двумя кривыми называется угол между касательными к ним, проведенными в точке пересечения кривых.

Уравнение (27) перепишется после этого в виде:

$$r\,dr = ar^2 d\theta \quad \text{или} \quad \frac{dr}{r} = a\,d\theta.$$

Интегрируя, имеем отсюда:

$$\log r = a\theta + C_1, \quad r = Ce^{a\theta}, \quad \text{где } C = e^{C_1}.$$

Полученные кривые называются *логарифмическими спиралями* [83].

§ 9. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

94. Основные свойства определенного интеграла. Мы видели, что определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

есть предел суммы вида:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad (x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k). \tag{2}$$

При этом мы считали $a < b$ и в соответствии с этим $x_{k-1} < x_k$.

Если $a > b$, то можно попрежнему определить интеграл (1) как предел суммы (2), но только при этом будем иметь:

$$a = x_0 > x_1 > x_2 \ldots > x_{k-1} > x_k > \ldots > x_{n-1} > x_n = b,$$

т. е. все разности $x_k - x_{k-1}$ будут отрицательными. Если, наконец, мы переставим пределы a и b, т. е. будем считать a верхним пределом и b нижним, то промежуточные точки x_k надо будет считать в обратном порядке, и в сумме (2) все разности $(x_k - x_{k-1})$ переменят знак, а следовательно, сама сумма и ее предел также переменят знак, т. е.

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Кроме того, из толкования определенного интеграла, как площади, естественно считать

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{4}$$

Отметим еще очевидное равенство:

$$\int_a^b dx = b - a. \tag{5}$$

Действительно, раз подинтегральная функция при всех x равна единице, то

$$\int_a^b dx = \lim [(x_1 - a) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (b - x_{n-1})];$$

но в квадратных скобках стоит постоянная величина $(b - a)$. Выражение (5) дает, очевидно [87], площадь прямоугольника с основанием $(b - a)$ и высотой, равной единице.

Переходя к перечислению свойств определенных интегралов, мы имеем, таким образом, первые три свойства:

I. *Определенный интеграл с одинаковыми верхним и нижним пределами считается равным нулю.*

II. *При перестановке между собой верхнего и нижнего пределов определенный интеграл, сохраняя абсолютное значение, меняет лишь знак:*

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

При $a < b$ это свойство можно считать определением интеграла от b до a. Считается, конечно, что интеграл, стоящий справа, существует.

III. *Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Это уже было выяснено в [87].

В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваемые функции считаются непрерывными в промежутке интегрирования.

IV. *Если дан ряд чисел*

$$a,\ b,\ c, \ldots,\ k,\ l,$$

расположенных в каком угодно порядке, то

$$\int_a^l f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \ldots + \int_k^l f(x)\,dx. \qquad (6)$$

Эту формулу достаточно установить для случая трех чисел a, b, c, после чего нетрудно распространить доказательство на какое угодно число слагаемых.

Допустим сперва, что $a < b < c$. Из определения вытекает, что

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

причем предел этот будет один и тот же, каким бы мы способом ни разбивали на части промежуток (a, c), лишь бы только наибольшая из разностей $(x_i - x_{i-1})$ стремилась к нулю, а число их возрастало беспредельно. Мы можем условиться разбивать промежуток (a, c) так, чтобы точка b, лежащая между a и c, каждый раз оказывалась одной из точек деления. Но тогда сумма

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

разобьется на две такого же типа, с той лишь разницею, что при составлении одной мы будем разбивать на части промежуток (a, b), при составлении же другой — промежуток (b, c), и притом так, что в обоих случаях число частей возрастает беспредельно, а наибольшая из разностей $(x_i - x_{i-1})$ стремится к нулю. Каждая из этих сумм будет стремиться соответственно к

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_b^c f(x)\,dx,$$

и мы окончательно получим:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь b лежит вне промежутка (a, c), например $a < c < b$. По доказанному сейчас мы можем написать:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

откуда

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx.$$

Но в силу свойства II имеем:

$$-\int_c^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx,$$

т. е. опять

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Аналогичным путем можно рассмотреть и все остальные возможные случаи взаимного расположения точек.

V. *Постоянный множитель можно выносить из-под знака определенного интеграла*, т. е.

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx,$$

ибо

$$\int_a^b Af(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^n Af(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = A \lim \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ = A\int_a^b f(x)\,dx.$$

VI. *Определенный интеграл от алгебраической суммы равен алгебраической сумме определенных интегралов от каждого слагаемого*, ибо, например:

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,dx = \lim \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - \varphi(\xi_i)](x_i - x_{i-1}) = \\ = \lim \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \lim \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

95. Теорема о среднем. VII. *Если в промежутке* (a, b) *функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *удовлетворяют условию*

$$f(x) \leqslant \varphi(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{7}$$

то и

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx \qquad (b > a), \tag{8}$$

короче говоря, *неравенства можно интегрировать*.

Составим разность

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\,dx =$$

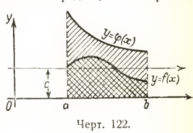
$$= \lim \sum_{i=1}^{n} [\varphi(\xi_i) - f(\xi_i)](x_i - x_{i-1}).$$

В силу неравенства (7) слагаемые, стоящие под знаком суммы, положительны или, по крайней мере, неотрицательны. Следовательно, то же можно сказать о всей сумме и ее пределе, что и приводит к неравенству (8).

Приведем еще геометрическое пояснение сказанного. Допустим сперва, что обе кривые

$$y = f(x), \; y = \varphi(x)$$

лежат над осью OX (черт. 122). Тогда фигура, ограниченная кривой $y = f(x)$, осью OX и ординатами $x = a$ и $x = b$, лежит целиком внутри аналогичной фигуры, ограниченной кривой $y = \varphi(x)$, а потому площадь первой фигуры не превосходит площади второй, т. е.



Черт. 122.

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Общий случай какого угодно расположения данных кривых относительно оси OX при сохранении условия (7) приводится к предыдущему, если передвинуть чертеж настолько кверху, чтобы обе кривые оказались над осью OX; это передвижение прибавит к каждой функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ одно и то же слагаемое c. Отметим, что если в (7) имеет место знак $<$, то и в (8) имеет место знак $<$. Функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ считаются непрерывными.

Следствие. *Если в промежутке* (a, b) *имеем:*

$$|f(x)| \leqslant \varphi(x) \leqslant M, \tag{9}$$

то

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant M(b-a) \quad (b > a). \tag{10}$$

В самом деле, условия (9) равносильны следующим:

$$-M \leqslant -\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant M,$$

Интегрируя эти неравенства в пределах от a до b (свойство VII) и пользуясь (5), получаем:

$$-M(b-a) \leqslant -\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant M(b-a),$$

что равносильно неравенствам (10).

Полагая $\varphi(x)=|f(x)|$, получаем из (10) важное неравенство:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx, \qquad (10_1)$$

которое является обобщением на случай интеграла известного свойства суммы: абсолютная величина суммы меньше или равна сумме абсолютных величин слагаемых. В написанной формуле знак равенства имеет место, как нетрудно понять, лишь в том случае, когда $f(x)$ не меняет знака в промежутке (a, b).

Из того же свойства VII вытекает весьма важная теорема.

Теорема о среднем. *Если функция* $\varphi(x)$ *сохраняет знак в промежутке* (a, b), то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad (11)$$

где ξ *есть некоторое значение, принадлежащее промежутку* (a, b).

Будем для определенности считать $\varphi(x)\geqslant 0$ в промежутке (a, b) и обозначим через m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ в промежутке (a, b). Так как, очевидно,

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

(причем оба знака равенства имеют место одновременно, только когда $f(x)$ постоянна) и $\varphi(x)\geqslant 0$, то

$$m\varphi(x) \leqslant f(x)\varphi(x) \leqslant M\varphi(x),$$

и в силу свойства VII, считая $b>a$,

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leqslant M\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Отсюда ясно, что существует такое число P, удовлетворяющее неравенству $m \leqslant P \leqslant M$, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = P\int_a^b \varphi(x)\,dx. \qquad (12)$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна, она принимает в промежутке (a, b) все значения, лежащие между наименьшим m и наибольшим M, в том числе и значение P [35]. Поэтому найдется такое значение ξ внутри промежутка (a, b), для которого

$$f(\xi)=P,$$

что и доказывает формулу (11).

Если $\varphi(x)\leqslant 0$ в промежутке (a, b) то $-\varphi(x)\geqslant 0$ в промежутке (a, b). Применяя к ней доказанную теорему, получим:

$$\int\limits_a^b f(x)[-\varphi(x)]\,dx=f(\xi)\int\limits_a^b[-\varphi(x)]\,dx;$$

вынося знак (—) за знак интеграла и умножая обе части на (—1), придем к формуле (11).

Точно так же, если $b<a$, то из предыдущего следует формула:

$$\int\limits_b^a f(x)\varphi(x)\,dx=f(\xi)\int\limits_b^a\varphi(x)\,dx.$$

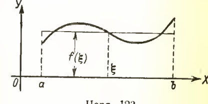
Переставляя в обеих частях пределы интегралов и умножая на (—1), придем к формуле (11), которая доказана, таким образом, во всей общности.

В частности, полагая $\varphi(x)=1$, получим *важный частный случай теоремы о среднем:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=f(\xi)\int\limits_a^b dx=f(\xi)(b-a). \qquad (13)$$

Значение определенного интеграла равно произведению длины промежутка интегрирования на значение подинтегральной функции при некотором промежуточном значении независимой переменной.

Если $a>b$, эту длину нужно взять со знаком (—). Геометрически предложение это равносильно тому, что, рассматривая площадь, ограниченную любой кривой, осью OX и двумя ординатами $x=a$, $x=b$, всегда можно найти равновеликий ей прямоугольник с тем же основанием $(b-a)$ и с высотой, *равной одной из ординат кривой в промежутке* (a, b) (черт. 123).



Черт. 123.

Нетрудно показать, что число ξ, входящее в формулу (11) или (13), всегда можно считать лежащим внутри промежутка (a, b).

96. Существование первообразной функции. VIII. *Если верхний предел определенного интеграла есть величина переменная, то производная интеграла по верхнему пределу равна значению подинтегральной функции при этом верхнем пределе.*

Заметим, что величина интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

при данной подинтегральной функции $f(x)$ зависит от пределов интегрирования a и b. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

с постоянным нижним пределом a и переменным верхним пределом x, причем переменную интегрирования мы обозначаем буквою t в отличие от верхнего предела x. Величина этого интеграла будет функцией верхнего предела x:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{14}$$

и, надо доказать, что

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Для доказательства вычислим производную функцию $F(x)$, исходя из определения производной [45]:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

Мы имеем:

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

(в силу свойства IV), откуда:

$$F(x+h) = F(x) + \int_x^{x+h} f(t)\,dt \quad \text{и} \quad \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Применяя (13), имеем:

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi)\cdot h,$$

где через ξ обозначено некоторое значение, принадлежащее проме-

жутку $(x, x+h)$, что дает:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(\xi).$$

Когда h стремится к нулю, ξ, лежащее между x и $x+h$, стремится к x, значение же $f(\xi)$, в силу непрерывности функции $f(x)$, стремится к $f(x)$, так что

$$\frac{dF(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}f(\xi)=f(x),$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что при $x=a$ мы можем придавать h только положительные значения, а при $x=b$ — только отрицательные значения $(a<b)$, и функция $F(x)$ имеет производную $f(x)$ во всем промежутке (a, b) (замкнутом). Об определении производной на концах замкнутого промежутка мы уже говорили в [46].

Как следствие вытекает [45], что *определенный интеграл* $F(x)$, *рассматриваемый как функция верхнего предела* x, *есть функция непрерывная в промежутке* (a, b), *причем надо считать* $F(a)=0$.

Отметим, что если мы применим к интегралу (14) теорему о среднем, то получим $F(x)=f(\xi)(x-a)$, откуда следует, что $F(x)\to 0$ при $x\to a$. Из предыдущих рассуждений вытекает также, что:

IX. *Всякая непрерывная функция* $f(x)$ *имеет первообразную функцию или неопределенный интеграл.*

Функция (14) есть та первообразная функция для $f(x)$, которая обращается в нуль при $x=a$.

Если $F_1(x)$ *есть одно из выражений первообразной функции, то*, как мы видели в [88]:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F_1(b)-F_1(a). \tag{15}$$

97. Разрыв подинтегральной функции. Во всех предыдущих рассуждениях предполагалось, что подинтегральная функция $f(x)$ непрерывна во всем промежутке интегрирования (a, b).

Введем теперь понятие интеграла и для некоторых разрывных функций.

Если в промежутке (a, b) *имеется точка* c, *в которой подинтегральная функция* $f(x)$ *терпит разрыв, но при этом интегралы*

$$\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx, \quad \int_{c+\varepsilon''}^b f(x)\,dx \qquad (a<b)$$

стремятся к определенным пределам, когда положительные числа ε' *и* ε'' *стремятся к нулю, то эти пределы называются*

определенными интегралами от функции $f(x)$, *взятыми соответственно между пределами* (a, c) *и* (c, b), т. е.

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon' \to +0} \int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx,$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon'' \to +0} \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx,$$

если эти пределы существуют.

Мы положим в этом случае

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Функция $F(x)$, определенная формулой (14), обладает, как нетрудно видеть, следующими свойствами:

$F'(x) = f(x)$ во всех точках (a, b), кроме $x = c$, и $F(x)$ непрерывна во всем промежутке (a, b), включая $x = c$.

Если точка c совпадает с одним из концов промежутка (a, b), надо рассматривать вместо двух только один из пределов:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \quad \text{или} \quad \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Наконец, если точек разрыва c в промежутке (a, b) не одна, а несколько, то нужно разбить промежуток на части, в каждой из которых будет уже только по одной точке разрыва.

При сделанном выше соглашении о смысле символа

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

свойство IX *и формула* (15)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F_1(b) - F_1(a)$$

будут наверно иметь место, если $F'_1(x) = f(x)$ во всех точках (a, b), кроме $x = c$, и $F_1(x)$ непрерывна во всем промежутке (a, b), включая $x = c$.

Утверждение это достаточно доказать для случая одной точки разрыва c внутри промежутка (a, b), так как случай нескольких точек разрыва и случай, когда $c = a$ или b, исследуются совершенно аналогичным образом.

Так как в промежутках $(a,\ c-\varepsilon')$, $(c+\varepsilon'',\ b)$ функция $f(x)$ также непрерывна, то к этим промежуткам применима формула (15), и мы имеем:

$$\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx = F_1(c-\varepsilon') - F_1(a),$$

$$\int_{c+\varepsilon''}^{b} f(x)\,dx = F_1(b) - F_1(c+\varepsilon'').$$

В силу непрерывности $F_1(x)$ мы можем написать:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon'\to+0}[F_1(c-\varepsilon') - F_1(a)] = F_1(c) - F_1(a),$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon''\to+0}[F_1(b) - F_1(c+\varepsilon'')] = F_1(b) - F_1(c),$$

т. е.

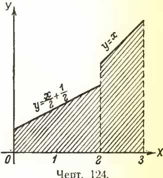
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$$
$$= [F_1(c) - F_1(a)] + [F_1(b) - F_1(c)] = F_1(b) - F_1(a),$$

что и требовалось доказать.

С точки зрения геометрической, рассмотренный случай встречается тогда, когда кривая $y=f(x)$ имеет разрыв в точке c, но так, что *площадь* кривой все же существует. Рассмотрим, например, график функции, определенной следующим образом:

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x < 2,$$

$$f(x) = x \quad \text{при} \quad 2 \leqslant x \leqslant 3$$



Черт. 124.

(черт. 124). Площадь, ограниченная этой кривой, осью OX, ординатой $x=0$ и переменной ординатой $x=x_1$, есть непрерывная функция от x, несмотря на то, что функция $f(x)$ терпит разрыв при $x=2$. С другой стороны, нетрудно найти первообразную функцию для $f(x)$, которая была бы непрерывна во всем промежутке $(0, 3)$. Это будет, например, функция $F_1(x)$, определяемая следующим образом:

$$F_1(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2,$$

$$F_1(x) = \frac{x^2}{2} \quad \text{при} \quad 2 \leqslant x \leqslant 3.$$

Действительно, дифференцируя, убеждаемся, что

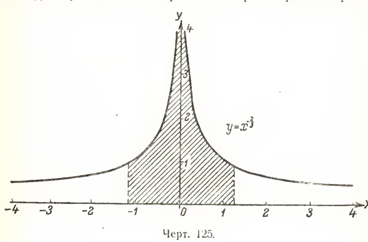
$$F'_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

в промежутке (0, 2) и $F'_1(x) = x$ в промежутке (2, 3). Кроме того, оба написанных выражения $F_1(x)$ при $x = 2$ дают одну и ту же величину 2, что и обеспечивает непрерывность $F_1(x)$.

Площадь, ограниченная нашей кривой, осью OX и ординатами $x = 0$, $x = 3$, выразится формулой:

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx = F_1(3) - F_1(0) = \frac{9}{2},$$

в чем нетрудно убедиться и непосредственным рассмотрением чертежа.



Черт. 125.

Рассмотрим еще функцию $y = x^{-2/3}$ (черт. 125). Она обращается в бесконечность при $x = 0$, но ее первообразная функция $3x^{1/3}$ остается непрерывной при этом значении x, а потому можем написать:

$$\int_{-1}^{+1} x^{-2/3}\,dx = 3x^{1/3}\Big|_{-1}^{+1} = 6;$$

другими словами, хотя рассматриваемая кривая при приближении x к нулю уходит в бесконечность, тем не менее она имеет совершенно определенную площадь между ординатами $x = -1$ и $x = 1$.

Для функции $\frac{1}{x^2}$ первообразная функция $\left(-\frac{1}{x}\right)$ обращается сама в бесконечность при $x = 0$, формула (15) неприменима к этой функции в том случае, когда точка 0 лежит внутри промежутка (a, b); кривая $\frac{1}{x^2}$ в таком промежутке конечной площади не имеет.

98. Бесконечные пределы. Предыдущие рассуждения можно распространить и на случай *бесконечного промежутка* и положить

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx, \tag{16}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx, \tag{17}$$

если эти пределы существуют.

Условие это наверно выполнено, если первообразная функция $F_1(x)$ стремится к определенным пределам, когда x стремится к $(+\infty)$ или к $(-\infty)$. Обозначив эти пределы просто через $F_1(+\infty)$ и $F_1(-\infty)$, будем иметь:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}[F_1(b)-F_1(a)] = F_1(+\infty)-F_1(a), \tag{18}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}[F_1(b)-F_1(a)] = F_1(b)-F_1(-\infty), \tag{19}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx = F_1(+\infty)-F_1(-\infty), \tag{20}$$

что и является обобщением формулы (15) на случай бесконечного промежутка.

Часто соотношение (16) пишут в виде

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

С точки зрения геометрической, при выполнении предыдущего условия можно сказать, что бесконечная ветвь кривой $y=f(x)$, которая соответствует $x\to\pm\infty$, имеет площадь.

Мы распространили, таким образом, понятие об определенном интеграле, установленное сперва для непрерывной функции и конечного промежутка, на случай прерывных функций и бесконечного промежутка. Характерным в этом распространении является вычисление сначала интеграла по укороченному промежутку от непрерывной функции и затем переход к пределу. Построенный таким образом интеграл, в отличие от первоначального, называется *несобственным* или *обобщенным интегралом.*

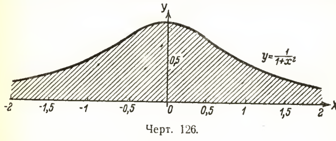
Заметим, что в некоторых случаях интегралы от разрывных функций в конечном промежутке имеют смысл и непосредственно как пределы сумм, указанных в [94]. Мы покажем это в дальней-

шем [116]. Это будет иметь, например, место для интеграла, выражающего площадь, указанную на черт. 124. Этот интеграл не будет, таким образом, по существу несобственным. Но если подинтегральная функция в промежутке интегрирования не ограничена по величине (обращается в бесконечность), или если этот промежуток бесконечен, то интеграл может существовать только как несобственный.

Пример. Кривая $y=\frac{1}{1+x^2}$, уходящая в бесконечность при $x=\pm\infty$, все же ограничивает с осью OX конечную площадь (черт. 126), так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x\,\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

При вычислении этого интеграла следует помнить, что для функции $\operatorname{arc\,tg} x$ нужно брать не любое значение этой многозначной функции, а именно



Черт. 126.

то, которое было определено в [24], для того чтобы она сделалась однозначной, т. е. между $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$; в противном случае предыдущая формула теряет смысл.

99. Замена переменной под знаком определенного интеграла. Пусть $f(x)$ — непрерывна в промежутке (a, b) или даже в более широком промежутке (A, B), о котором будет сказано ниже. Пусть далее функция $\varphi(t)$ однозначна, непрерывна и имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ в промежутке (α, β), причем:

$$\varphi(\alpha)=a \quad \text{и} \quad \varphi(\beta)=b. \tag{21}$$

Положим далее, что значения $\varphi(t)$ при изменении t в промежутке (α, β) не выходят из промежутка (a, b) или из того более широкого промежутка (A, B), в котором $f(x)$ — непрерывна. При этом сложная функция $f[\varphi(t)]$ есть непрерывная функция t в промежутке (α, β).

При высказанных предположениях, если ввести вместо x новую переменную интегрирования t:

$$x=\varphi(t), \tag{22}$$

то определенный интеграл преобразуется по формуле:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{23}$$

В самом деле, введем вместо рассматриваемых интегралов — интегралы с переменными пределами:

$$F(x) = \int_a^x f(y)\,dy; \quad \Psi(t) = \int_\alpha^t f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz.$$

В силу (22) $F(x)$ есть сложная функция t:

$$F(x) = F[\varphi(t)] = \int_a^{\varphi(t)} f(y)\,dy.$$

Вычисляя ее производную по правилу дифференцирования сложных функций, имеем:

$$\frac{dF(x)}{dt} = \frac{dF(x)}{dx}\,\frac{dx}{dt},$$

но в силу свойства VIII [96]:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x);$$

из формулы же (22) следует:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t),$$

откуда:

$$\frac{dF(x)}{dt} = f(x)\,\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t).$$

Вычислим теперь производную от функции $\Psi(t)$. В силу свойства VIII и сделанных нами предположений имеем:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t).$$

Функции $\Psi(t)$ и $F(x)$, рассматриваемые как функции от t, имеют, таким образом, одинаковые производные в промежутке (α, β), а потому [89] могут отличаться лишь на постоянное слагаемое, но при $t=\alpha$ мы имеем:

$$x = \varphi(\alpha) = a, \quad F(x)\,|_{t=\alpha} = F(a) = 0; \quad \Psi(\alpha) = 0,$$

т. е. эти две функции равны при $t=\alpha$, а потому и при всех значениях t в промежутке (α, β). В частности, при $t=\beta$ имеем:

$$F(x)\,|_{t=\beta} = F(b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

что и требовалось доказать.

Весьма часто вместо подстановки (22):

$$x = \varphi(t)$$

употребляют обратную

$$t = \psi(x). \qquad (24$$

Тогда пределы α и β определяются сразу по формулам:

$$\alpha = \psi(a), \quad \beta = \psi(b),$$

но нужно здесь иметь в виду, что *выражение* (22) *для* x, *которое получим, если решим уравнение* (24) *относительно* x, *должно удовлетворять всем указанным выше условиям*, в частности, функция $\varphi(t)$ должна быть *однозначной* функцией от t. Если это свойство $\varphi(t)$ не соблюдено, то формула (23) может оказаться неверной

Введя в интеграле

$$\int_{-1}^{+1} dx = 2$$

вместо x новую независимую переменную t по формуле

$$t = x^2,$$

в правой части формулы (23) получим интеграл с одинаковыми пределами $+1$, $+1$, равный, следовательно, нулю, что невозможно. Ошибка происходит вследствие того, что выражение x через t:

$$x = \pm\sqrt{t}$$

есть функция многозначная.

Пример. Функция $f(x)$ называется четной функцией x, если $f(-x) = f(x)$, и нечетной функцией, если $f(-x) = -f(x)$.

Например, $\cos x$ есть четная функция и $\sin x$ — нечетная.

Покажем, что

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

если $f(x)$ — четная, и

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0,$$

если $f(x)$ — нечетная.

Разобьем интеграл на два [94, IV]:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

В первом интеграле совершим замену переменной $x=-t$ и воспользуемся свойствами II и III [94]:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx,$$

откуда, подставляя в предыдущую формулу:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(-x)+f(x)]\,dx.$$

Если $f(x)$ — четная функция, то сумма $[f(-x)+f(x)]$ равна $2f(x)$, а если $f(x)$ — нечетная, то эта сумма равна нулю, что и доказывает наше утверждение.

100. Интегрирование по частям. *Формула интегрирования по частям* [91] *для определенных интегралов может быть написана в виде:*

$$\int_{a}^{b} u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v(x)\,du(x). \qquad (25)$$

Действительно, интегрируя почленно тождество [91]:

$$u(x)\,dv(x) = d\,[u(x)\,v(x)] - v(x)\,du(x),$$

получим:

$$\int_{a}^{b} u(x)\,dv(x) = \int_{a}^{b} d\,[u(x)\,v(x)] - \int_{a}^{b} v(x)\,du(x),$$

но в силу свойства IX [96]:

$$\int_{a}^{b} d\,[u(x)\,v(x)] = \int_{a}^{b} \frac{d\,[u(x)\,v(x)]}{dx}\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_{a}^{b},$$

что и дает формулу (25). Считается, конечно, что $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные в промежутке (a, b).

Пример. Вычислить интегралы

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin^n x\,dx, \qquad \int_{0}^{\pi/2} \cos^n x\,dx.$$

Положим

$$I_n = \int_{0}^{\pi/2} \sin^n x\,dx$$

Интегрируя по частям, имеем:

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}x\sin x\,dx=-\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}x\,d\cos x=$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}(n-1)\sin^{n-2}x\cos x\cdot\cos x\,dx=$$

$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cos^2x\,dx=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,(1-\sin^2x)\,dx=$$

$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=(n-1)\,I_{n-2}-(n-1)\,I_n,$$

т. е.

$$I_n=(n-1)\,I_{n-2}-(n-1)\,I_n,$$

откуда, решая относительно I_n:

$$I_n=\frac{n-1}{n}\,I_{n-2}. \tag{26}$$

Формула эта называется *формулой приведения*, так как приводит вычисление интеграла I_n к такому же интегралу, но с меньшим значком $(n-2)$.

Различим теперь два случая в зависимости от того, есть ли n число четное или нечетное.

1. $n=2k$ (четное). Имеем в силу (26):

$$I_{2k}=\frac{2k-1}{2k}\,I_{2k-2}=\frac{(2k-1)(2k-3)}{2k\cdot(2k-2)}\,I_{2k-4}=\ldots=\frac{(2k-1)(2k-3)\ldots3\cdot1}{2k\,(2k-2)\ldots4\cdot2}\,I_0,$$

и так как

$$I_0=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2},$$

то окончательно

$$I_{2k}=\frac{(2k-1)(2k-3)\ldots3\cdot1}{2k\,(2k-2)\ldots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

2. $n=2k+1$ (нечетное). Аналогично предыдущему находим:

$$I_{2k+1}=\frac{2k\,(2k-2)\ldots4\cdot2}{(2k+1)(2k-1)\ldots5\cdot3}\,I_1,\quad I_1=\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi/2}=1,$$

а потому

$$I_{2k+1}=\frac{2k\,(2k-2)\ldots4\cdot2}{(2k+1)(2k-1)\ldots5\cdot3}.$$

Интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$

можно вычислить таким же путем, но проще привести его к предыдущему, заметив, что

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx,$$

откуда, положив

$$\frac{\pi}{2} - x = t, \quad x = \frac{\pi}{2} - t,$$

на основании формулы (23) и свойства II [94] имеем:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = -\int_{\pi/2}^{0} \sin^n t \, dt = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt.$$

Объединяя полученные результаты, можем написать:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2k} x \, dx = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 3 \cdot 1}{2k(2k-2)\ldots 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2}, \qquad (27)$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2k+1} x \, dx = \frac{2k(2k-2)\ldots 4 \cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots 5 \cdot 3}. \qquad (28)$$

§ 10. ПРИЛОЖЕНИЯ ПОНЯТИЯ ОБ ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

101. Вычисление площадей. В [87] мы видели, что площадь, ограниченная данной кривой $y = f(x)$, осью OX и двумя ординатами $x = a$ и $x = b$, выражается определенным интегралом

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$

Однако определенная таким образом площадь дает нам не действительную сумму площадей, которые образует данная кривая с осью OX, а только алгебраическую их сумму, в которую каждая площадь, расположенная под осью OX, входит со знаком (—). Для того чтобы получить сумму этих площадей в обычном смысле, нужно вычислить

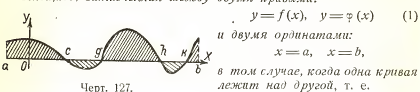
$$\int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Так, сумма заштрихованных на черт. 127 площадей равна

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_c^g f(x)\,dx + \int_g^h f(x)\,dx - \int_h^k f(x)\,dx + \int_k^b f(x)\,dx.$$

Площадь, заключенная между двумя кривыми:

$$y = f(x), \quad y = \varphi(x) \qquad (1)$$



Черт. 127.

и двумя ординатами:

$$x = a, \quad x = b,$$

в том случае, когда одна кривая лежит над другой, т. е.

$$f(x) \geqslant \varphi(x)$$

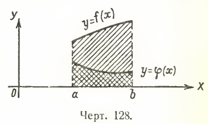
в промежутке (a, b), *выражается определенным интегралом*

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,dx. \qquad (2)$$

Допустим сперва, что обе кривые лежат над осью OX. Непосредственно из черт. 128 видно, что искомая площадь S равна разности площадей, ограниченных данными кривыми с осью OX:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,dx,$$

что и требовалось доказать. Общий случай какого угодно расположения кривых относительно оси OX приводится к разобранному, если передвинуть ось OX настолько книзу, чтобы обе кривые оказались над осью OX; это передвижение равносильно прибавлению к обеим функциям $f(x)$ и $\varphi(x)$ одного и того же постоянного слагаемого, причем разность $f(x) - \varphi(x)$ остается без изменения.



Черт. 128.

Предлагаем в виде упражнения доказать, что *если данные две кривые пересекаются так, что одна кривая лежит частью ниже, а частью выше другой, то сумма площадей, лежащих между ними и ординатами* $x = a$, $x = b$, *равна*

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\,dx. \qquad (3)$$

Часто вычисление определенного интеграла называют *квадратурой*. Это связано с тем, что определение площади, как указано выше, сводится к вычислению определенного интеграла.

Примеры. 1. *Площадь, ограниченная параболой второй степени*

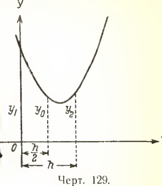
$$y = ax^2 + bx + c,$$

осью OX и двумя ординатами, расстояние между которыми есть h, равна

$$\frac{h}{6}(y_1 + y_2 + 4y_0), \qquad (4)$$

где y_1 и y_2 означают крайние ординаты кривой, y_0 — ординату, равноотстоящую от крайних.

При этом предполагается, что кривая лежит над осью OX.



Черт. 129.

При доказательстве формулы (4) мы можем, не ограничивая общности, считать, что крайняя ордината слева направлена по оси OY (черт. 129), так как передвижение всего чертежа параллельно оси OX не изменяет ни величины рассматриваемой площади, ни взаимного расположения крайних и средней ординат, ни величин этих ординат. Но при этом предположении, допустив, что уравнение параболы имеет вид:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

мы выразим искомую площадь S в виде определенного интеграла:

$$S = \int_0^h (ax^2 + bx + c)\,dx = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\Big|_0^h =$$

$$= a\frac{h^3}{3} + b\frac{h^2}{2} + ch = \frac{h}{6}(2ah^2 + 3bh + 6c).$$

При наших обозначениях мы имеем:

$$y_0 = ax^2 + bx + c\Big|_{x=\frac{h}{2}} = \frac{1}{4}ah^2 + \frac{1}{2}bh + c,$$

$$y_1 = ax^2 + bx + c\Big|_{x=0} = c, \quad y_2 = ax^2 + bx + c\Big|_{x=h} = ah^2 + bh + c,$$

откуда следует:

$$y_1 + y_2 + 4y_0 = 2ah^2 + 3bh + 6c,$$

что и доказывает наше утверждение.

2. *Площадь эллипса.* Эллипс, уравнение которого

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

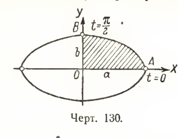
симметричен относительно координатных осей, а потому искомая площадь S равна учетверенной площади той части эллипса, которая лежит в первом координатном углу, т. е.

$$S = 4\int_0^a y\,dx$$

(черт. 130). Вместо того, чтобы определить y из уравнения эллипса и подставить полученное выражение в подинтегральную функцию, мы воспользуемся параметрическим представлением эллипса:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \tag{5}$$

и введем вместо x новую переменную t; y выразится тогда сразу вторым

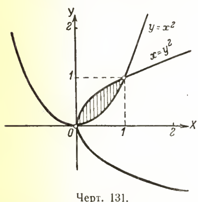


Черт. 130.

из уравнений (5). Когда x меняется от 0 до a, t меняется от $\frac{\pi}{2}$ до 0, и так как все условия правила замены переменных [99] в данном случае выполнены, то

$$S = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t\, d(a\cos t) = -4ab\int_{\pi/2}^{0}\sin^2 t\, dt = 4ab\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 t\, dt.$$

По формуле (27) [100] при $k=1$ мы имеем:



Черт. 131.

$$\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 t\, dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4},$$

откуда находим окончательно

$$S = \pi ab. \tag{6}$$

При $a=b$, когда эллипс обращается в круг радиуса a, получим известное выражение πa^2 для площади круга.

3. *Вычислить площадь, заключенную между двумя кривыми*

$$y = x^2, \quad x = y^2.$$

Данные кривые (черт. 131) пересекаются в двух точках (0, 0), (1, 1), координаты которых мы получим, решая совместно уравнения этих кривых. Так как в промежутке (0, 1) имеем:

$$\sqrt{x} \geqslant x^2,$$

то искомая площадь S в силу (2) выражается формулой:

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

102. Площадь сектора. *Площадь сектора, ограниченная кривой, уравнение которой в полярных координатах есть*

$$r = f(\theta), \tag{7}$$

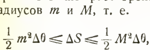
и двумя радиусами-векторами

$$\theta = \alpha, \quad \theta = \beta, \tag{8}$$

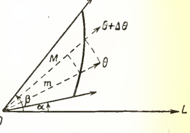
проведенными из полюса под углами α и β к полярной оси, выражается формулой:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta. \tag{9}$$

Для вывода формулы (9) разобьем рассматриваемую площадь (черт. 132) на малые элементы, разделив угол между радиусами-векторами (8) на n частей. Рассмотрим площадь одного из таких малых секторов, ограниченного лучами θ и $\theta + \Delta\theta$. Обозначив через ΔS его площадь, через m и M — наименьшее и наибольшее значения функции $r = f(\theta)$ в промежутке $(\theta, \theta + \Delta\theta)$, мы видим, что ΔS заключается между площадями двух круговых секторов того же раствора $\Delta\theta$, но радиусов m и M, т. е.



$$\frac{1}{2} m^2 \Delta\theta \leqslant \Delta S \leqslant \frac{1}{2} M^2 \Delta\theta,$$



Черт. 132.

а потому, обозначив через P некоторое число, лежащее между m и M, можем написать:

$$\Delta S = \frac{1}{2} P^2 \Delta\theta.$$

Так как непрерывная функция $f(\theta)$ в промежутке $(\theta, \theta + \Delta\theta)$ принимает все значения между m и M, то в этом промежутке наверное найдется такое значение θ', при котором

$$f(\theta') = P,$$

а тогда

$$\Delta S = \frac{1}{2} [f(\theta')]^2 \Delta\theta. \tag{10}$$

Если теперь будем увеличивать число элементарных секторов ΔS так, что наибольшее из значений $\Delta\theta$ стремится к нулю, и если

вспомним сказанное в [87], то в пределе получим:

$$S = \lim \sum \Delta S = \lim \sum \frac{1}{2} [f(\theta')]^2 \Delta\theta =$$
$$= \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2 d\theta,$$

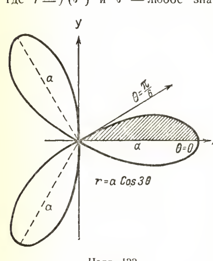
что и требовалось доказать.

Заметим, что основная идея приведенного доказательства формулы (9) заключается в замене площади сектора ΔS площадью кругового сектора того же растворения $\Delta\theta$ и радиуса $f(\theta')$. Приняв вместо *точного* выражения (10) *приближенное:*

$$\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta,$$

где $r = f(\theta'')$ и θ'' — любое значение из промежутка $(\theta, \theta + \Delta\theta)$ для площади этого сектора мы получим в пределе тот же результат:

$$\lim \sum \frac{1}{2} [f(\theta'')]^2 \Delta\theta =$$
$$= \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2 \, d\theta. \quad (11)$$



Черт. 133.

При таком выводе подинтегральное выражение в формуле (11) получает простой геометрический смысл: $\frac{1}{2} r^2 d\theta$ есть приближенное выражение площади элементарного сектора растворения $d\theta$ и потому называется просто *элементом площади в полярных координатах.*

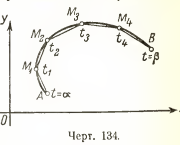
Пример. Найти площадь, ограниченную замкнутой кривой

$$r = a \cos 3\theta \qquad (a > 0).$$

Кривая эта, построение которой по точкам не представляет никакого труда, изображена на черт. 133 и называется трилистником. Полная площадь, ею ограниченная, равна шестикратной площади заштрихованной части, соответствующей изменению θ от 0 до $\frac{\pi}{6}$, так что по формуле (9) имеем:

$$S = 6 \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2} a^2 \cos^2 3\theta \, d\theta = a^2 \int_0^{\pi/6} \cos^2 3\theta \, d(3\theta) = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \frac{\pi a^2}{4}.$$

103. Длина дуги. Пусть имеется дуга AB некоторой кривой. Впишем в нее ломаную линию (черт. 134) и будем увеличивать число сторон этой ломаной так, чтобы наибольшая из длин сторон стремилась к нулю. Если при этом периметр ломаной будет стремиться к определенному пределу, не зависящему от того, какие именно ломаные мы вписываем, то дуга называется *спрямляемой*, а упомянутый предел называется *длиной этой дуги*. Это же определение длины годится и для замкнутой кривой.



Черт. 134.

Пусть кривая задана явным уравнением $y=f(x)$, причем точкам A и B соответствуют значения $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$, и пусть $f(x)$ имеет непрерывную производную в промежутке $a\leqslant x\leqslant b$, которому и соответствует дуга AB. Мы покажем, что при этих условиях дуга AB спрямляема и что ее длина выражается определенным интегралом.

Пусть $AM_1M_2\ldots M_{n-1}B$ — вписанная ломаная, причем ее вершинам соответствуют значения

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b,$$

и обозначим $y_i=f(x_i)$. Принимая во внимание формулу для длины отрезка из аналитической геометрии, для периметра ломаной получим следующую формулу

$$p=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}.$$

Пользуясь формулой конечных приращений

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) \qquad (x_{i-1}<\xi_i<x_i),$$

получим для длины отдельной стороны ломаной выражение

$$\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,(x_i-x_{i-1}),$$

из которого мы видим, что требование того, чтобы наибольшая из сторон стремилась к нулю, равносильно требованию, чтобы наибольшая из разностей (x_i-x_{i-1}) стремилась к нулю. Для периметра ломаной получаем выражение

$$p=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,(x_i-x_{i-1}),$$

а оно действительно имеет предел, равный интегралу

$$\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Таким образом, длина l дуги AB выражается формулой

$$l=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \qquad (12)$$

Пусть $x'<x''$ — какие-либо два значения из промежутка (a, b), а M' и M'' — соответствующие точки на дуге AB. Применяя теорему о среднем, получаем следующую формулу для длины l' дуги $M'M''$:

$$l'=\int_{x'}^{x''} \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=\sqrt{1+f'^2(\xi_1)}\,(x''-x') \quad (x'<\xi_1<x'').$$

Для длины хорды $M'M''$, пользуясь формулой конечных приращений, получаем формулу:

$$M'M'' = \sqrt{(x''-x')^2+[f(x'')-f(x')]^2} =$$
$$= \sqrt{1+f'^2(\xi_2)}\,(x''-x') \qquad (x'<\xi_2<x'').$$

Отсюда следует:

$$\frac{M'M''}{l'}=\frac{\sqrt{1+f'^2(\xi_2)}}{\sqrt{1+f'^2(\xi_1)}}.$$

Если точки M' и M'' стремятся к точке M с абсциссой x, то x' и $x''\to x$, а тем самым ξ_1 и $\xi_2\to x$, и из последней формулы мы получаем

$$\frac{M'M''}{l'}\to 1.$$

Этим мы пользовались в **[70]**.

Положим теперь, что кривая задана параметрически

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t),$$

причем точкам A и B соответствуют значения $t=\alpha$ и $t=\beta\,(\alpha<\beta)$. Мы предполагаем, что значениям t из промежутка $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ соответствуют точки кривой AB так, что различным t соответствуют различные точки этой кривой, которая сама себя не пересекает и не замкнута (черт. 134). Далее мы предполагаем, что в промежутке $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ существуют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$.

Пусть, как и выше, $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$ — вписанная ломаная и $t_0=\alpha<t_1<t_2< \ldots <t_{n-1}<t_n=\beta$ — соответствующие значения параметра t. Для периметра ломаной получим выражение

$$p=\sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2}$$

или, применяя формулу конечных приращений,

$$p=\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i')}\,(t_i-t_{i-1}) \qquad (t_{i-1}<\tau_i \text{ и } \tau_i'<t_i). \quad (13)$$

Можно показать, что требование того, чтобы наибольшая из сторон ломаной стремилась к нулю, равносильно требованию того, чтобы наибольшая из разностей (t_i-t_{i-1}) стремилась к нулю. Это может быть доказано и без предположения существования производных $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$.

Выражение (13) отличается от суммы, дающей в пределе интеграл

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt, \quad (14)$$

ввиду того, что аргументы τ_i и τ_i', вообще говоря, различны. Введем сумму

$$q=\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\,(t_i-t_{i-1}),$$

которая в пределе дает интеграл (14). Для того чтобы доказать, что и сумма (13) стремится к пределу (14), надо показать, что разность

$$p-q=\sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i')}-\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\right](t_i-t_{i-1})$$

стремится к нулю.

Умножая и деля на сумму радикалов, получим:

$$p-q=\sum_{i=1}^{n}\frac{\psi'(\tau_i')+\psi'(\tau_i)}{\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i')}+\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}}[\psi'(\tau_i')-\psi'(\tau_i)]\,(t_i-t_{i-1}).$$

Так как

$$[\psi'(\tau_i')+\psi'(\tau_i)]\leqslant\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i')}+\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)},$$

то

$$|p-q| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\psi'(\tau_i') - \psi'(\tau_i)| (t_i - t_{i-1}).$$

Числа τ_i и τ_i' принадлежат промежутку (t_{i-1}, t_i), и, в силу равномерной непрерывности $\psi'(t)$ в промежутке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, можно утверждать, что наибольшая из величин $|\psi'(\tau_i') - \psi'(\tau_i)|$, которую мы обозначим через δ, стремится к нулю, если наибольшая из разностей $(t_i - t_{i-1})$ стремится к нулю. Но из предыдущей формулы следует:

$$|p-q| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \delta (t_i - t_{i-1}) = \delta \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \delta (\beta - \alpha),$$

откуда очевидно, что $p - q \to 0$. Таким образом, сумма (13), выражающая периметр вписанной ломаной, стремится к интегралу (14), т. е.

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \tag{15}$$

Эта формула для длины l остается справедливой и в случае замкнутой кривой. Чтобы убедиться в этом, достаточно, например, разбить замкнутую кривую на две незамкнутые, к каждой применить формулу (16) и сложить полученные значения l. Точно так же, если некоторая кривая L состоит из конечного числа кривых L_k, каждая из которых имеет параметрическое представление, удовлетворяющее указанным выше условиям, то, вычисляя по формуле (15) длину каждой кривой L_k и складывая эти длины, получим длину кривой L.

Рассмотрим переменное значение t из промежутка (α, β), которому соответствует переменная точка M дуги AB. Длина дуги AM будет функцией от t и будет выражаться формулой

$$s(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \tag{16}$$

Принимая во внимание правило дифференцирования интеграла по верхнему пределу, получим

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}, \tag{17}$$

т. е.

$$ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt,$$

откуда, принимая во внимание, что

$$\varphi'(t) = \frac{dx}{dt}, \qquad \psi'(t) = \frac{dy}{dt},$$

получаем формулу для дифференциала дуги [70]:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2},$$

а формула (15) может быть, без указания переменной интегрирования, переписана в виде

$$l = \int_{(A)}^{(B)} ds = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Пределы (A) и (B) указывают на начальную и конечную точки линии.

Если $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$ при всех t из (α, β), то, согласно (17), мы получим производную от параметра t по s:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}}.$$

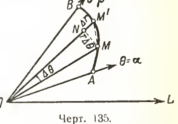
Наличие непрерывных производных $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ при условии $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$ гарантирует нам непрерывно изменяющуюся касательную вдоль AB.

Если кривая задана в полярных координатах уравнением

$$r = f(\theta),$$

то, введя прямоугольные координаты x и y, связанные с полярными r и θ соотношениями:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \quad (18)$$



Черт. 135.

[82], мы можем рассматривать эти уравнения, как параметрическое задание кривой с параметром θ.

Мы имеем тогда:

$$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta;$$
$$dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta;$$
$$dx^2 + dy^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2,$$

откуда,

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2}, \qquad (19)$$

и если точкам A и B соответствуют значения α и β полярного угла θ (черт. 135), то формула (15) даст нам:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta. \qquad (20)$$

Выражение для ds (19), которое называется *дифференциалом дуги в полярных координатах,* можно получить и непосредственно из чертежа, заменив бесконечно малую дугу MM' ее хордой и вычислив последнюю, как гипотенузу прямоугольного треугольника MNM', катеты которого $\overline{MN}$ и $\overline{NM'}$ приближенно равны, соответственно, $rd\theta$ и dr.

Примеры. 1. Длина дуги s *параболы* $y = x^2$, отсчитываемой от вершины (0, 0) до переменной точки с абсциссой x, по формуле (12) выражается *интегралом:*

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^x \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2x} \sqrt{1 + t^2}\, dt \tag{21}$$

(мы положили $t = 2x$).

В силу примера 11 [92] имеем:

$$\int \sqrt{1 + t^2}\, dt = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{1 + t^2} + \log\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right)\right] + C.$$

Подставив это в (21), получим без труда:

$$s = \frac{1}{4}\left[2x\sqrt{1 + 4x^2} + \log\left(2x + \sqrt{1 + 4x^2}\right)\right].$$

2. Длина эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

в силу симметричности его относительно осей координат, равна учетверенной длине той его части, которая лежит в первом координатном углу. Представив эллипс параметрически уравнениями

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t$$

и заметив, что точкам A и B соответствуют значения параметра 0 и $\frac{\pi}{2}$, мы получим для искомой длины l следующее выражение по формуле (15):

$$l = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt. \tag{22}$$

Интеграл этот не может быть вычислен в конечном виде; для него можно указать только способ приближенного вычисления, который будет приведен ниже.

3. Длина дуги *логарифмической спирали*

$$r = Ce^{a\theta}$$

[83], отсекаемой радиусами-векторами $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, в силу (20) выражается интегралом:

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = C\sqrt{1 + a^2}\int_\alpha^\beta e^{a\theta}\, d\theta = \frac{C\sqrt{1 + a^2}}{a}\left(e^{a\beta} - e^{a\alpha}\right).$$

4. В [78] мы рассматривали цепную линию, пусть $M(x, y)$ есть какая-либо ее точка. Вычислим длину дуги AM (черт. 93). Принимая во внимание выражение для $(1+y'^2)$ из [78], получим:

$$AM = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^x \frac{y}{a}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = ay',$$

откуда

$$a^2 + (\text{дуга } AM)^2 = a^2 + a^2y'^2 = a^2(1+y'^2) = y^2,$$

т. е. длина дуги AM равна катету прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна ординате точки M, и другой катет которого равен a. Мы получаем, таким образом, следующее правило построения длины дуги AM: *Из вершины A цепной линии, как центра, надо описать окружность радиусом, равным ординате точки M; отрезок $\overline{OQ}$ оси OX от начала координат O до точки пересечения Q оси OX с упомянутой окружностью и будет представлять собою спрямленную дугу AM* (черт. 93).

В предыдущих формулах при выборе знаков мы руководились тем обстоятельством, что для точек, лежащих на правой части цепной линии, y' имеет знак $(+)$.

5. Для циклоиды, рассмотренной в [79], определим длину дуги l ветви OO' (черт. 94) и площадь S, ограниченную этой ветвью и осью OX:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\,dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a,$$

т. е. *длина дуги одной ветви циклоиды равна учетверенному диаметру катящегося круга;*

$$S = \int_0^{2\pi a} y\,dx = \int_0^{2\pi} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt = 2\pi a^2 - 2a^2[\sin t]_0^{2\pi} + a^2\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2,$$

т. е. *площадь, ограниченная одной ветвью циклоиды и той неподвижной прямой, по которой катится круг, равна утроенной площади катящегося круга.*

Вычисляя l, при извлечении корня $\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}$, мы должны выбрать арифметическое значение корня, что и сделали, ибо при изменении t от 0 до 2π функция $\sin\frac{t}{2}$ — положительна.

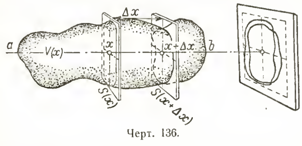
6. Кардиоида, рассмотренная в [84], симметрична относительно полярной оси (черт. 111), а потому для вычисления ее длины l достаточно вычислить длину дуги при изменении θ в промежутке $(0, \pi)$ и полученный результат удвоить:

$$l = 2\int_0^\pi \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta = 2\int_0^\pi \sqrt{4a^2(1+\cos\theta)^2 + 4a^2\sin^2\theta}\,d\theta =$$

$$= 8a\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8a\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi = 16a,$$

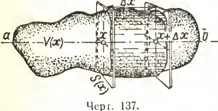
т. е. *длина дуги кардиоиды в восемь раз больше диаметра катящегося (или неподвижного) круга.*

104. Вычисление объемов тел по их поперечным сечениям. Вычисление объема данного тела сводится также к вычислению определенного интеграла, если мы умеем определять площадь поперечных сечений тела, перпендикулярных данному направлению.



Черт. 136.

Обозначим через V объем данного тела (черт. 136) и допустим, что нам известны площади всех поперечных сечений тела плоскостями, перпендикулярными данному направлению, которое мы примем за ось OX. Всякое поперечное сечение определится абсциссой x точки пересечения его с осью OX, а потому площадь этого поперечного сечения будет функцией от x, которую мы обозначим через $S(x)$ и будем считать известной.



Черт. 137.

Пусть, далее, a и b означают абсциссы крайних сечений тела. Для вычисления объема V разобьем его на элементы рядом поперечных сечений, начиная от $x = a$ и кончая $x = b$; рассмотрим один из таких элементов ΔV, образованный сечениями с абсциссами x и $x + \Delta x$. Заменяем объем ΔV объемом прямого цилиндра, высота которого равна Δx, а основание совпадает с поперечным сечением нашего тела, соответствующим абсциссе x (черт. 137). Объем

такого цилиндра выразится произведением $S(x)\,\Delta x$, и, таким образом, мы получим следующее приближенное выражение для нашего объема V:

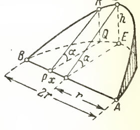
$$\sum S(x)\,\Delta x,$$

где суммирование распространено на все те элементы, на которые разбито наше тело поперечными сечениями. В пределе, когда число элементов беспредельно возрастает и наибольшее из Δx стремится к нулю, написанная сумма превращается в определенный интеграл, который и дает точное значение объема V, что приводит к следующему предложению:

Если для данного тела известны все его поперечные сечения плоскостями, перпендикулярными некоторому данному направлению, принятому за ось OX, то объем тела V выражается формулой:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx, \qquad (23)$$

где $S(x)$ означает площадь поперечного сечения с абсциссой x, а a и b — абсциссы крайних сечений тела.



Черт. 138.

Пример. *Объем „цилиндрического отрезка“*, отсекаемый от прямого кругового полуцилиндра плоскостью, проведенной через диаметр его основания (черт. 138). Примем диаметр $\overline{AB}$ за ось OX, точку A — за начало координат; обозначим радиус основания цилиндра через r, угол, образуемый верхним сечением отрезка с его основанием, через α.

Поперечное сечение, перпендикулярное диаметру $\overline{AB}$, имеет вид прямоугольного треугольника PQR, и его площадь выражается формулой:

$$S(x) = \frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{QR} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\,\overline{PQ}^2.$$

Далее, по известному свойству окружности, отрезок $\overline{PQ}$ есть среднее геометрическое между отрезками $\overline{AP}$, $\overline{PB}$ диаметра $\overline{AB}$, а потому:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{AP}\cdot\overline{PB} = x(2r - x),$$

и окончательно

$$S(x) = \frac{1}{2}x(2r - x)\operatorname{tg}\alpha.$$

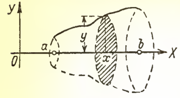
Применяя формулу (23), для искомого объема V получим:

$$V = \int_0^{2r} S(x)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\int_0^{2r} x(2r - x)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\left(rx^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{2r} =$$

$$= \frac{2}{3}r^3\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}r^2 h,$$

если ввести „высоту“ отрезка $h = r\operatorname{tg}\alpha$.

105. Объем тела вращения. В случае, когда рассматриваемое тело получается от вращения данной кривой $y=f(x)$ вокруг оси OX, поперечные его сечения будут круги радиуса y (черт. 139), а потому:



Черт. 139.

$$S(x)=\pi y^2,$$

$$V(x)=\int_a^b \pi y^2\,dx,$$

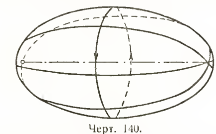
т. е. *объем тела, получаемого при вращении вокруг оси OX части кривой $y=f(x)$, заключенной между ординатами $x=a$, $x=b$, выражается формулой:*

$$V=\int_a^b \pi y^2\,dx. \tag{24}$$

Пример. *Объем эллипсоида вращения.* При вращении эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

вокруг большой оси получается тело, называемое *удлиненным эллипсоидом*


Черт. 140.

вращения (черт. 140). Крайние значения абсциссы x в рассматриваемом случае будут $(-a)$ и $(+a)$, а потому формула (24) дает:

$$V_{\text{удл}}=\pi\int_{-a}^{+a} y^2\,dx=\pi\int_{-a}^{+a} b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{+a}=\frac{4}{3}\pi ab^2. \tag{25}$$

Точно так же мы сможем вычислить и объем *сжатого эллипсоида вращения*, который получается при вращении нашего эллипса вокруг малой оси. Нужно только переставить между собой буквы x, y, a и b, что дает:

$$V_{\text{сж}}=\pi\int_{-b}^{+b} x^2\,dy=\pi\int_{-b}^{+b} a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\frac{4}{3}\pi ba^2. \tag{26}$$

В случае $a=b$, оба эллипсоида обращаются в шар радиуса a, объем которого равен $\frac{4}{3}\pi a^3$.

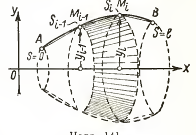
106. Поверхность тела вращения. *Поверхностью тела вращения данной кривой в плоскости XOY вокруг оси OX называется предел, к которому стремится поверхность тела, получаемого при вращении вокруг той же оси ломаной, вписанной в данную кривую, когда число сторон этой ломаной беспредельно увеличивается, а наибольшая из длин сторон стремится к нулю* (черт. 141).

Если вращается часть кривой, заключенная между точками A и B, то поверхность F тела вращения выражается формулой:

$$F = \int_{(A)}^{(B)} 2\pi y \, ds, \qquad (27)$$

где ds есть дифференциал дуги данной кривой, т. е.

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$



Черт. 141.

В этой формуле кривая может быть задана как угодно, в явной или в параметрической форме; символы (A) и (B) показывают, что нужно интегрировать между теми пределами для независимой переменной, которые соответствуют данным точкам кривой A и B.

Будем считать, что уравнение кривой задано в параметрической форме, причем роль параметра играет длина дуги s кривой, отсчитываемая от точки A, и обозначим через l длину всей кривой AB. Эта кривая, конечно, считается спрямляемой. Мы имеем: $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$. Разобьем, как всегда, промежуток $(0, l)$ изменения s на частичные промежутки

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_{n-1} < s_n = l.$$

Пусть значению $s = s_i$ соответствует точка M_i кривой, причем, очевидно, M_0 совпадает с A и M_n — с B. Обозначим через q_i длину отрезка $\overline{M_{i-1}M_i}$, через Δs_i — длину дуги $M_{i-1}M_i$ и положим $y_i = \psi(s_i)$. Используя формулу для поверхности усеченного конуса, находим следующую формулу для поверхности, получаемой от вращения ломаной $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$:

$$Q = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} q_i$$

или

$$Q = 2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} q_i + \pi \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1}) q_i.$$

Пусть δ — наибольшее из абсолютных значений $|y_i - y_{i-1}|$. В силу равномерной непрерывности функции $\psi(s)$ в промежутке $0 \leqslant s \leqslant l$ величина δ стремится к нулю, если наибольшая из разностей $(s_i - s_{i-1})$ стремится к нулю. Но мы имеем:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1}) q_i \right| \leqslant \delta \sum_{i=1}^{n} q_i \leqslant \delta l,$$

откуда следует, что второе слагаемое в выражении Q стремится к нулю. Исследуем первое слагаемое, для чего перепишем его в виде:

$$2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} q_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \Delta s_i - 2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} (\Delta s_i - q_i).$$

Покажем, что вычитаемое в этом выражении стремится к нулю. Для этого заметим, что непрерывная в промежутке $(0, l)$ функция $y = \psi(s)$ ограничена, и, следовательно, существует такое положительное число m, что $|y_{i-1}| \leqslant m$ при всех i. Поэтому:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} (\Delta s_i - q_i) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} m (\Delta s_i - q_i) = m \left(l - \sum_{i=1}^{n} q_i \right).$$

Но если наибольшая из разностей $(s_i - s_{i-1})$ стремится к нулю, то и наибольшая из длин хорд q_i стремится к нулю, и периметр вписанной ломаной стремится к длине дуги

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \to l,$$

откуда

$$2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} (\Delta s_i - q_i) \to 0.$$

Таким образом, в выражении Q остается исследовать лишь слагаемое

$$2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \Delta s_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \psi(s_{i-1})(s_i - s_{i-1}).$$

Но предел этой суммы и приводит нас к интегралу (27). Таким образом, мы и получаем эту формулу. Если кривая задана параметрически через любой параметр t, то мы имеем [ср. 103]:

$$F = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi\psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt, \qquad (28_1)$$

и в случае явного уравнения $y = f(x)$ линии AB:

$$F = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{28_2}$$

Пример. *Поверхность эллипсоида вращения, удлиненного и сжатого.* Рассмотрим сперва поверхность удлиненного эллипсоида вращения. Применяя обозначения примера [105], по формуле (28) имеем:

$$F_{\text{удл}} = 2\pi \int_{-a}^{a} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{y^2 + (yy')^2}\, dx.$$

Из уравнения эллипса мы имеем:

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \qquad yy' = -\frac{b^2 x}{a^2},$$

откуда

$$(yy')^2 = \frac{b^4 x^2}{a^4},$$

$$F_{\text{удл}} = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} + \frac{b^4 x^2}{a^4}}\, dx = 2\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}\, dx.$$

Вводя сюда выражение для эксцентриситета эллипса

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

имеем (см. пример [99]):

$$F_{\text{удл}} = 2\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 x^2}{a^2}}\, dx = 4\pi b \int_{0}^{a} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 x^2}{a^2}}\, dx =$$

$$= \frac{4\pi b a}{\varepsilon} \int_{0}^{a} \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon x}{a}\right)^2}\, d\left(\frac{\varepsilon x}{a}\right) = \frac{4\pi a b}{\varepsilon} \int_{0}^{\varepsilon} \sqrt{1 - t^2}\, dt.$$

Интегрируя по частям, имеем (ср. пример 11 [92]):

$$\int \sqrt{1 - t^2}\, dt = t\sqrt{1 - t^2} + \int \frac{t^2}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt =$$

$$= t\sqrt{1 - t^2} - \int \sqrt{1 - t^2}\, dt + \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}},$$

откуда

$$\int \sqrt{1 - t^2}\, dt = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{1 - t^2} + \arcsin t\right],$$

и окончательно

$$F_{\text{удл}} = 2\pi a b\left[\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon}\right]. \tag{29}$$

Эта формула годится в пределе и для $\varepsilon = 0$, т. е. когда $b = a$, и эллипсоид превращается в шар радиуса a. В скобках при этом оказывается неопределенное выражение, раскрывая которое [65], имеем:

$$\left.\frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon}\right|_{\varepsilon = 0} = \left.\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}}{1}\right|_{\varepsilon = 0} = 1.$$

Перейдем теперь к сжатому эллипсоиду вращения. Переставив между собой буквы x и y, a и b, мы находим:

$$F_{\text{сж}} = 2\pi \int_{-b}^{b} \sqrt{x^2 + (xx')^2}\, dy,$$

где x считается функцией от y.

Но из уравнения эллипса имеем:

$$x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right), \qquad xx' = -\frac{a^2 y}{b^2}, \qquad (xx')^2 = \frac{a^4 y^2}{b^4},$$

откуда

$$F_{\text{сж}} = 2\pi a \int_{-b}^{b} \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)}\, dy = 4\pi a \int_{0}^{b} \sqrt{1 + \frac{y^2 a^2 \varepsilon^2}{b^4}}\, dy =$$

$$= \frac{4\pi b^2}{\varepsilon} \int_{0}^{\frac{a\varepsilon}{b}} \sqrt{1 + t^2}\, dt = \frac{2\pi b^2}{\varepsilon} \left[t\sqrt{1 + t^2} + \log\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right)\right]\Big|_{0}^{\frac{a\varepsilon}{b}} =$$

$$= \frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\left[\frac{a\varepsilon}{b}\sqrt{1 + \frac{a^2\varepsilon^2}{b^2}} + \log\left(\frac{a\varepsilon}{b} + \sqrt{1 + \frac{a^2\varepsilon^2}{b^2}}\right)\right] =$$

$$= \frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\left[\frac{a\varepsilon}{b}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} + \log\left(\frac{a\varepsilon}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}\right)\right] = 2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\log\frac{a(1+\varepsilon)}{b},$$

и окончательно

$$F_{\text{сж}} = 2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\log\frac{a(1+\varepsilon)}{b}. \tag{30}$$

107. Определение центров тяжести. Теоремы Гульдина. Если дана система n материальных точек:

$$M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ \ldots,\ M_n(x_n, y_n),$$

массы которых равны, соответственно,

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n,$$

то центром тяжести системы G называется точка, координаты которой x_G, y_G удовлетворяют условиям:

$$Mx_G = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \qquad My_G = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \tag{31}$$

где M означает полную массу системы

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

При определении центра тяжести можно каким угодно образом группировать точки системы, разбивая их на частные системы с тем, чтобы при вычислении координат центра тяжести G всей системы заменять всю группу точек, вошедших в какую угодно частную

систему, одной точкой, а именно ее центром тяжести, приписав ей массу, равную сумме масс вошедших в нее точек.

Мы не будем останавливаться на доказательстве этого общего принципа, которое не представляет труда и легко может быть проверено на простейших частных случаях системы с тремя, четырьмя, и т. д. точками.

В дальнейшем мы будем иметь дело не с системами точек, а с тем случаем, когда масса заполняет сплошь некоторую плоскую фигуру (область) или линию.

Для простоты ограничимся рассмотрением лишь однородных тел, плотность которых примем за единицу, так что масса такой фигуры будет равняться ее длине, если она имеет вид линии, и площади, если она имеет вид плоской области.

Пусть сперва нужно определить центр тяжести *дуги* кривой AB (черт. 142), длина которой s. Следуя предыдущему общему принципу, разобьем дугу AB на n малых элементов Δs. Центр тяжести всей системы можно вычислить, заменив каждый из этих элементов одной точкой, центром тяжести рассматриваемого элемента, сосредоточив в ней всю массу элемента $\Delta m = \Delta s$.[1])

Черт. 142.

Рассмотрим один из таких элементов Δs и обозначим координаты его концов через (x, y), $(x + \Delta x, y + \Delta y)$; координаты же его центра тяжести обозначим через $(\bar{x}, \bar{y})$. При достаточном уменьшении элемента Δs, можем считать, что точка $(\bar{x}, \bar{y})$ сколь угодно мало отстоит от точки (x, y).

По формулам (31) имеем, как и в [**104**]:

$$Mx_G = sx_G = \sum \bar{x}\,\Delta m = \sum \bar{x}\,\Delta s = \lim \sum x\,\Delta s = \int_{(A)}^{(B)} x\,ds, \quad (32)$$

$$My_G = sy_G = \sum \bar{y}\,\Delta m = \sum \bar{y}\,\Delta s = \lim \sum y\,\Delta s = \int_{(A)}^{(B)} y\,ds, \quad (33)$$

откуда, вычислив s по формуле:

$$s = \int_{(A)}^{(B)} ds = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2},$$

и определим координаты центра тяжести G.

---

[1]) Центр тяжести каждого такого элемента, вообще говоря, не лежит на кривой, хотя и будет тем ближе к ней, чем меньше элемент, что и указано схематически на черт. 142.

Из формул (32) и (33) вытекает важная теорема:

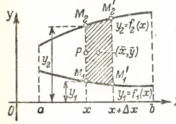
Теорема I Гульдина. *Поверхность тела, полученного при вращении дуги данной плоской кривой вокруг некоторой оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее, равняется произведению длины вращающейся дуги на длину пути, описанного при этом вращении центром тяжести дуги.*

В самом деле, приняв ось вращения за ось OX, для поверхности F тела, описанного при вращении дуги AB, имеем (27) [106]:

$$F = 2\pi \int_{(A)}^{(B)} y\, ds = 2\pi y_G \cdot s$$

[в силу (33)], что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь некоторую плоскую область S (площадь которой обозначим также через S). Допустим для простоты, что эта область (черт. 143) ограничена двумя кривыми, ординаты которых обозначим через



Черт. 143.

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x).$$

Следуя общему принципу, указанному в начале этого номера, разобьем фигуру на n вертикальных полосок ΔS прямыми, параллельными оси OY. При вычислении координат центра тяжести G фигуры мы можем заменить каждую такую полоску ее центром тяжести, сосредоточив в нем массу полосок $\Delta m = \Delta S$. Рассмотрим одну из таких полосок; обозначим через x и $x + \Delta x$ абсциссы ограничивающих ее прямых M_1M_2 и $M_1'M_2'$, через $\bar{x}$, $\bar{y}$ — координаты центра тяжести.

При достаточном сужении полоски, т. е. при уменьшении ее ширины Δx, точка $(\bar{x}, \bar{y})$ сколь угодно мало будет отстоять от середины P отрезка прямой M_1M_2, вследствие чего можем писать приближенные равенства:

$$\bar{x} \sim x, \quad \bar{y} \sim \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Далее, масса Δm полоски, равная ее площади ΔS может быть приравнена площади прямоугольника с основанием Δx и высотой, сколь угодно мало отличающейся от длины отрезка $\overline{M_1M_2} = y_2 - y_1$, т. е.

$$\Delta m \sim (y_2 - y_1)\,\Delta x.$$

Применяя формулу (31), можем написать:

$$Mx_G = Sx_G = \sum \bar{x}\,\Delta m = \lim \sum [x(y_2 - y_1)]\,\Delta x = \int_a^b x(y_2 - y_1)\,dx, \qquad (34)$$

$$My_G = Sy_G = \sum \bar{y}\,\Delta m = \lim \sum \left(\frac{y_2 + y_1}{2}\right)(y_2 - y_1)\,\Delta x = \lim \sum \left[\frac{1}{2}(y_2^2 - y_1^2)\right]\Delta x = \int_a^b \frac{1}{2}(y_2^2 - y_1^2)\,dx. \qquad (35)$$

Из формулы (35) вытекает:

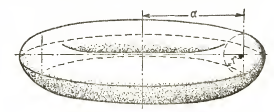
Теорема II Гульдина. *Объем тела, получаемого при вращении плоской фигуры вокруг некоторой оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее, равен произведению площади вращающейся фигуры на длину пути, описанного ее центром тяжести при вращении.*

В самом деле, приняв ось вращения за ось OX, нетрудно заметить, что объем рассматриваемого тела вращения V равен разности объемов тел, получаемых при вращении кривой y_2 и кривой y_1, а потому, согласно (24) [**105**]:

$$V = \pi \int_a^b y_2^2\,dx - \pi \int_a^b y_1^2\,dx = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx = 2\pi y_G \cdot S,$$

в силу (35), что и требовалось доказать.

Полученные две теоремы Гульдина весьма полезны как при определении поверхности или объема фигур вращения, когда известно положение центра тяжести вращающейся фигуры, так и обратно — при определении центра тяжести фигуры, когда известны объем или поверхность производимой ею фигуры вращения.



Черт. 144.

Примеры. 1. Найти *объем* V кольца (*тора*), получаемого при вращении круга радиуса r (черт. 144) вокруг оси, лежащей в его плоскости на расстоянии a от центра (причем $r < a$, т. е. ось вращения не пересекает окружность).

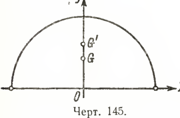
Центр тяжести вращающегося круга находится, очевидно, в его центре, а потому длина пути, описываемого центром тяжести при вращении, равна $2\pi a$. Площадь вращающейся фигуры равна πr^2, а потому по теореме II Гульдина имеем:

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi a = 2\pi^2 a r^2. \tag{36}$$

2. Найти *поверхность* F кольца, рассмотренного в примере 1.

Длина вращающейся окружности равна $2\pi r$; центр тяжести попрежнему совпадает с центром окружности, а потому в силу теоремы I Гульдина имеем:

$$F = 2\pi r \cdot 2\pi a = 4\pi^2 ar. \tag{37}$$



Черт. 145.

3. Найти центр тяжести G *полукруга* радиуса a. Примем основание полукруга за ось OX и направим ось OY по перпендикуляру к OX, восставленному в центре (черт. 145); в силу симметричности фигуры относительно оси OY ясно, что центр тяжести G лежит на оси OY. Остается найти только y_G. Для этой цели применим теорему II Гульдина. Тело, получаемое при вращении полукруга вокруг оси OX, есть шар радиуса a, и его объем равен $\frac{3}{4}\pi a^3$. Площадь S вращающейся фигуры равна $\frac{\pi}{2}a^2$, а потому:

$$\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{\pi}{2}a^2 \cdot 2\pi y_G, \quad y_G = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi}.$$

4. Найти центр тяжести G' *полуокружности* радиуса a.

Выбирая координатные оси, как и в предыдущем примере, видим опять, что искомый центр G' лежит на оси OY, так что остается найти $y_{G'}$. Применяя теорему I Гульдина и заметив, что поверхность тела вращения F в данном случае равна $4\pi a^2$, длина $s = \pi a$, получим:

$$4\pi a^2 = \pi a \cdot 2\pi y_{G'}, \quad y_{G'} = 2\frac{a}{\pi}.$$

Как и следовало ожидать, центр тяжести полуокружности лежит ближе к ней, чем центр тяжести ограничиваемого ею полукруга.

108. Приближенное вычисление определенных интегралов; формулы прямоугольников и трапеций. Вычисление определенных интегралов на основании формулы (15) [96] с помощью первообразной функции не всегда возможно, так как, хотя первообразная функция и существует, если подинтегральная функция непрерывна, однако она далеко не всегда может быть найдена фактически, и даже тогда, когда ее можно найти, она имеет часто весьма сложный и неудобный для вычислений вид. Поэтому важное значение имеют способы приближенного вычисления определенных интегралов.

Бо́льшая часть их основывается на истолковании определенного интеграла как площади и как предела суммы:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{38}$$

Во всем дальнейшем мы условимся раз навсегда делить промежуток (a, b) на n *равных* частей; длину каждой части обозначим через h, так что

$$h=\frac{b-a}{n}, \quad x_i=a+ih \quad (x_0=a; \quad x_n=a+nh=b).$$

Обозначим далее через y_i значение подинтегральной функции $y=f(x)$ при $x=x_i$ $(i=0, 1, \ldots, n)$:

$$y_i=f(x_i)=f(a+ih). \tag{39}$$

Эти величины мы считаем известными; их можно получить непосредственным вычислением, если функция $f(x)$ задана аналитически, или снять прямо с чертежа, если она изображена графически.

Полагая в сумме, стоящей в правой части (38):

$$\xi_i=x_{i-1} \text{ или } x_i,$$

мы получим две приближенные *формулы прямоугольников*:

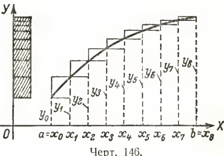
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[y_0+y_1+\ldots+y_{n-1}], \tag{40}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[y_1+y_2+\ldots+y_n], \tag{41}$$

где знак $(\approx)$ обозначает приближенное равенство.

Чем больше число n, т. е. чем меньше h, тем эти формулы будут точнее и в пределе, при $n\to\infty$ и $h\to 0$, дадут точную величину определенного интеграла.

Таким образом, *погрешности формул* (40) и (41) *стремятся к нулю при возрастании числа ординат*. При данном же значении числа ординат верхний предел погрешности особенно просто определяется для того случая, когда данная функция $f(x)$ *монотонна* в промежутке (a, b) (черт. 146). В этом случае ясно непосредственно из чертежа, что *погрешность* каждой из формул (40) и (41) *не превышает* суммы площадей заштрихованных прямоугольников, т. е. *не превышает* площади прямоугольника с тем же основанием $\frac{b-a}{n}=h$ и высотой, равной сумме высот y_n-y_0 заштрихованных прямоугольников, т. е. *величины*

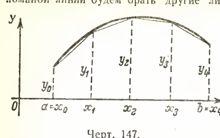


Черт. 146.

$$\frac{b-a}{n}(y_n-y_0). \tag{42}$$

Формулы прямоугольников вводят вместо точного выражения площади кривой $y=f(x)$ приближенное ее выражение — площадь ступенчатой ломаной линии, составленной из горизонтальных и вертикальных отрезков, ограничивающих прямоугольники.

Иные приближенные выражения мы получим, если вместо ступенчатой ломаной линии будем брать другие линии, которые достаточно мало отличаются от данной кривой; чем ближе такая вспомогательная линия подходит к кривой $y = f(x)$, тем меньше будет погрешность, которую мы совершаем, приняв за величину площади — площадь, ограниченную вспомогательной линией.



Черт. 147.

Так, например, если мы заменим данную кривую вписанной в нее ломаной линией, ординаты которой при $x = x_i$ совпадают с ординатами данной кривой (черт. 147), другими словами, заменим рассматриваемую площадь суммою площадей вписанных в нее заштрихованных трапеций, то получим приближенную *формулу трапеций:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right]=$$

$$=\frac{b-a}{2n}\,[y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n]. \qquad (43)$$

109. Формула касательных и формула Понселе. Увеличим теперь число делений вдвое, подразделив каждое из делений пополам. Мы получим таким путем $2n$ делений (черт. 148):

$$x_0,\ x_{1/2}=a+\frac{h}{2},\ x_1=a+h,\ \ldots,\ x_i=a+ih,$$

$$x_{i+1/2}=a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h,\ \ldots,\ x_n=b,$$

которым будут соответствовать ординаты:

$$y_0,\ y_{1/2},\ y_1,\ \ldots,\ y_i,\ y_{i+1/2},\ \ldots,\ y_n$$

(ординаты $y_0, y_1, \ldots, y_n$ будем называть *четными*, ординаты $y_{1/2}, y_{3/2}, \ldots, y_{n-1/2}$ — *нечетными*).

В конце каждой нечетной ординаты проведем касательную до пересечения ее с двумя соседними четными ординатами и заменим данную площадь суммою площадей построенных таким путем трапеций. Полученная таким образом приближенная формула называется *формулой касательных:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\,[y_{1/2}+y_{3/2}+\ldots+y_{n-1/2}]=\sigma_1. \qquad (44)$$

Черт. 148.

Одновременно с предыдущими *описанными* трапециями рассмотрим *вписанные трапеции*, которые получим, соединив хордами концы соседних нечетных ординат; присовокупим к ним еще две крайние трапеции, обра-

зованные хордами, соединяющими концы ординат y_0 и $y_{1/2}$, $y_{n-1/2}$ и y_n. Сумму площадей полученных трапеций обозначим через

$$\sigma_2 = \frac{b-a}{2n}\left[\frac{y_0+y_n}{2} - \frac{y_{1/2}+y_{n-1/2}}{2} + 2y_{1/2} + 2y_{3/2} + \ldots + 2y_{n-1/2}\right].$$

Если кривая $y = f(x)$ *в промежутке* (a, b) *не имеет точек перегиба*, т. е. *только выпукла или только вогнута*, то площадь S кривой заключается между площадями σ_1 и σ_2, и естественно поэтому принять за приближенное выражение для S среднее арифметическое $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$, что дает *формулу Понселе:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[\frac{y_0+y_n}{4} - \frac{y_{1/2}+y_{n-1/2}}{4} + 2y_{1/2} + 2y_{3/2} + \ldots + 2y_{n-1/2}\right]. \quad (45)$$

Нетрудно видеть, что погрешность этой формулы при сделанном предположении о виде кривой не превосходит абсолютного значения

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = \left(\frac{y_{1/2}+y_{n-1/2}}{2} - \frac{y_0+y_n}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{4n}, \quad (46)$$

причем выражение, стоящее в скобках, равно, как это нетрудно показать из свойства средней линии трапеции, отрезку средней ординаты, отсекаемому хордами, соединяющими между собой концы крайних четных и крайних нечетных ординат.

110. Формула Симпсона. Оставив в силе предыдущее подразделение на четное число частей, заменим данную кривую рядом дуг парабол второй степени, проведя их через концы каждых трех ординат:

$$y_0,\ y_{1/2},\ y_1;\ y_1,\ y_{3/2},\ y_2;\ \ldots;\ y_{n-1},\ y_{n-1/2},\ y_n.$$

Вычисляя площадь каждой из полученных таким путем криволинейных фигур по формуле (4) [**101**], мы получим приближенную формулу Симпсона:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[y_0 + 4y_{1/2} + 2y_1 + 4y_{3/2} + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + 4y_{n-1/2} + y_n\right]. \quad (47)$$

На выводе погрешности этой формулы, а равно и погрешности формулы трапеций, мы здесь останавливаться не будем. Заметим, вообще, что выражение погрешности в виде определенной формулы имеет скорее теоретическое, чем практическое значение, так как обыкновенно дает слишком грубый предел.

По поводу предыдущего построения заметим, что соответствующим подбором a, b и c в параболе $y = ax^2 + bx + c$ можно всегда заставить ее пройти через заданные три точки плоскости с различными абсциссами.

На практике для точности результата существенное значение имеет плавный ход кривой, и в соседстве с точками, где кривая более или менее резко меняет вид, нужно вести вычисления с большей точностью, для чего необходимо вводить более мелкие подразделения промежутка. Во всяком случае полезно перед вычислением составить себе хотя бы только приблизительное представление о ходе кривой.

Весьма существенное значение при приближенных вычислениях имеет *схема расположения действий*. Для того чтобы дать представление о ней, а также чтобы сравнить точность, даваемую различными выведенными выше приближенными формулами, мы приводим следующие примеры:

$$S=\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=1,$$

$$n=10,\quad \frac{b-a}{n}=0{,}157\,079\,63,\quad \frac{b-a}{2n}=0{,}078\,539\,81,\quad \frac{b-a}{6n}=0{,}026\,179\,94$$

y_1	sin 9°	0,156 4345
y_2	sin 18°	0,309 0170
y_3	sin 27°	0,453 9905
y_4	sin 36°	0,587 7853
y_5	sin 45°	0,707 1068
y_6	sin 54°	0,809 0170
y_7	sin 63°	0,891 0065
y_8	sin 72°	0,951 0565
y_9	sin 81°	0,987 6883
Σ_1		5,853 1024

$y_{1/2}$	sin 4°,5	0,078 4591
$y_{3/2}$	sin 13°,5	0,233 4454
$y_{5/2}$	sin 22°,5	0,382 6834
$y_{7/2}$	sin 31°,5	0,522 4986
$y_{9/2}$	sin 40°,5	0,649 4480
$y_{11/2}$	sin 49°,5	0,760 4060
$y_{13/2}$	sin 58°,5	0,852 6402
$y_{15/2}$	sin 67°,5	0,923 8795
$y_{17/2}$	sin 76°,5	0,972 3699
$y_{19/2}$	sin 85°,5	0,996 9173
Σ_2		6,372 7474

y_0	sin 0°	0,000 0000
y_{10}	sin 90°	1,000 0000

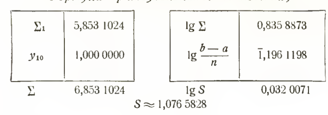
Формула прямоугольников по недостатку

Σ_1	5,853 1024
y_0	0,000 0000
Σ	5,853 1024

lg Σ	0,767 3861
$\lg\frac{b-a}{n}$	$\bar{1}$,196 1198
lg S	$\bar{1}$,963 5059

$S=0{,}919\,4080$

Формула прямоугольников по избытку

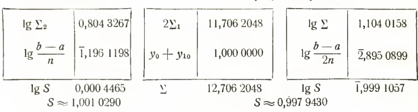


Σ_1	5,853 1024	$\lg \Sigma$	0,835 8873
y_{10}	1,000 0000	$\lg \dfrac{b-a}{n}$	$\bar{1}$,196 1198
Σ	6,853 1024	$\lg S$	0,032 0071

$S \approx 1{,}076\,5828$

Формула касательных

Формула трапеций



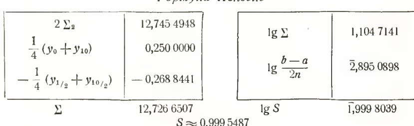
$\lg \Sigma_2$	0,804 3267
$\lg \dfrac{b-a}{n}$	$\bar{1}$,196 1198
$\lg S$	0,000 4465

$S \approx 1{,}001\,0290$

$2\Sigma_1$	11,706 2048	$\lg \Sigma$	1,104 0158
$y_0 + y_{10}$	1,000 0000	$\lg \dfrac{b-a}{2n}$	$\bar{2}$,895 0899
Σ	12,706 2048	$\lg S$	$\bar{1}$,999 1057

$S \approx 0{,}997\,9430$

Формула Понселе



$2\Sigma_2$	12,745 4948	$\lg \Sigma$	1,104 7141
$\frac{1}{4}(y_0 + y_{10})$	0,250 0000		
$-\frac{1}{4}(y_{1/2} + y_{10/2})$	− 0,268 8441	$\lg \dfrac{b-a}{2n}$	$\bar{2}$,895 0898
Σ	12,726 6507	$\lg S$	$\bar{1}$,999 8039

$S \approx 0{,}999\,5487$

Формула Симпсона

$2\Sigma_1$	11,706 2048	$\lg \Sigma$	1,582 0314
$4\Sigma_2$	25,490 9896	$\lg \dfrac{b-a}{6a}$	$\bar{2}$,417 9685
$y_0 + y_{10}$	1,000 0000		
Σ	38,197 1944	$\lg S$	$\bar{1}$,999 9999

$S \approx 1{,}000\,0000$

$$S = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2 = 0{,}272\,198\,2613\ldots, ^{1)}$$

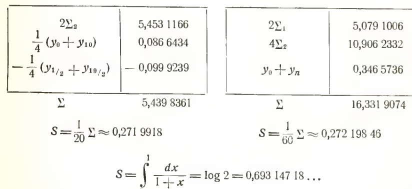
$$n = 10, \quad \frac{b-a}{2n} = \frac{1}{20}, \quad \frac{b-a}{6n} = \frac{1}{60}.$$

[1]) Эта формула будет выведена во втором томе.

y_1	0,094 3665
y_2	0,175 3092
y_3	0,240 7012
y_4	0,290 0623
y_5	0,324 3721
y_6	0,345 5909
y_7	0,356 1263
y_8	0,358 4065
y_9	0,354 6154
Σ_1	2,539 5503

$y_{1/2}$	0,048 6685
$y_{3/2}$	0,136 6865
$y_{5/2}$	0,210 0175
$y_{7/2}$	0,267 3538
$y_{9/2}$	0,308 9926
$y_{11/2}$	0,336 4722
$y_{13/2}$	0,352 0389
$y_{15/2}$	0,358 1540
$y_{17/2}$	0,357 1470
$y_{19/2}$	0,351 0273
Σ_2	2,726 5583

y_0	0,000 0000
y_{10}	0,346 5736



Формула Понселе

$2\Sigma_2$	5,453 1166
$\frac{1}{4}(y_0+y_{10})$	0,086 6434
$-\frac{1}{4}(y_{1/2}+y_{19/2})$	— 0,099 9239
Σ	5,439 8361

$$S=\frac{1}{20}\Sigma\approx 0{,}271\,9918$$

Формула Симпсона

$2\Sigma_1$	5,079 1006
$4\Sigma_2$	10,906 2332
y_0+y_n	0,346 5736
Σ	16,331 9074

$$S=\frac{1}{60}\Sigma\approx 0{,}272\,198\,46$$

$$S=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\log 2=0{,}693\,147\,18\ldots$$

$$n=20,\quad \frac{b-a}{2n}=\frac{1}{40},\quad \frac{b-a}{6n}=\frac{1}{120}.$$

y_1	0,952 3810
y_2	0,909 0909
y_3	0,869 5653
y_4	0,833 3333
y_5	0,800 0000
y_6	0,769 2307
y_7	0,740 7407
y_8	0,714 2857
y_9	0,689 6552
y_{10}	0,666 6667
y_{11}	0,645 1613
y_{12}	0,625 0000
y_{13}	0,606 0606
y_{14}	0,588 2353
y_{15}	0,571 4287
y_{16}	0,555 5556
y_{17}	0,540 5405
y_{18}	0,526 3146
y_{19}	0,512 8205
Σ_1	13,116 6666

$y_{1/2}$	0,975 6097
$y_{3/2}$	0,930 2326
$y_{5/2}$	0,888 8889
$y_{7/2}$	0,851 0638
$y_{9/2}$	0,816 3266
$y_{11/2}$	0,784 3135
$y_{13/2}$	0,754 7169
$y_{15/2}$	0,727 2727
$y_{17/2}$	0,701 7543
$y_{19/2}$	0,677 9661
$y_{21/2}$	0,655 7377
$y_{23/2}$	0,634 9207
$y_{25/2}$	0,615 3846
$y_{27/2}$	0,597 0149
$y_{29/2}$	0,597 7101
$y_{31/2}$	0,563 3804
$y_{33/2}$	0,547 9451
$y_{35/2}$	0,533 3333
$y_{37/2}$	0,519 4806
$y_{39/2}$	0,506 3291
Σ_2	13,861 3816

y_0	1.000 0000
y_{20}	0,500 0000

Формула трапеций

$2\Sigma_1$	26,232 1332
y_0+y_{20}	1,500 0000
Σ	27,732 1332

$$S=\frac{1}{40}\Sigma\approx 0,693\,303\,33$$

Формула Понселе

$2\Sigma_2$	27,722 7632
$\frac{1}{4}(y_0+y_{20})$	0,375 0000
$-\frac{1}{4}(y_{1/2}+y_{39/2})$	− 0,370 4847
Σ	27,727 2785

$$S=\frac{1}{40}\Sigma\approx 0,693\,181\,96$$

Формула Симпсона

$2\Sigma_1$	26,232 1332
$4\Sigma_2$	55,445 5264
y_0+y_{20}	0,500 0000
Σ	83,177 6596

$$S=\frac{1}{120}\Sigma\approx 0,693\,147\,16$$

111. Вычисление определенного интеграла с переменным верхним пределом. Во многих вопросах приходится вычислять значения определенного интеграла

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$$

при переменном верхнем пределе.

Основываясь на формуле трапеций (43), можно указать следующий способ получения приближенных значений этого интеграла, конечно, не при всех значениях x, а только при тех, которыми подразделен на части промежуток (a, b), т. е.

$$F(a),\ F(x_1),\ F(x_2),\ \ldots,\ F(x_k), \ldots,\ F(x_{n-1}),\ F(b).$$

По формуле (43) мы имеем:

$$F(x_k)=\int_a^{a+kh} f(x)\ dx\approx h\left[\frac{y_0+y_1}{2}+\ldots+\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\right], \tag{48}$$

$$F(x_{k+1})=\int_a^{a+(k+1)h} f(x)\ dx\approx h\left[\frac{y_0+y_1}{2}+\ldots+\frac{y_{k-1}+y_k}{2}+\frac{y_k+y_{k+1}}{2}\right]\approx$$

$$\approx F(x_k)+\frac{1}{2}h(y_k+y_{k+1}). \tag{49}$$

Эта формула дает возможность, вычислив значение $F(x_k)$, перейти к следующему значению $F(x_{k+1})=F(x_k+h)$.

Вычисление это можно располагать по схеме, приведенной на стр. 273.

112. Графические способы. Эти вычисления можно произвести графически, если дан график кривой $y=f(x)$; мы получим таким путем построение графика интегральной кривой:

$$y=\int_a^x f(x)\,dx=F(x)$$

по графику кривой

$$y=f(x). \tag{50}$$

Прежде всего, если имеем достаточно делений, то мы можем принять приближенно

$$\frac{s_k}{2}=\frac{y_{k-1}+y_k}{2}=y_{k-1/_2}, \tag{51}$$

т. е. если график кривой (50) начерчен, то величины $\frac{s_k}{2}$ получаются непосредственно из чертежа, как ординаты кривой при $x_{k-1/_2}=a+\frac{2k-1}{2}h$ (черт. 149).

Наметим на оси OY точки:

$$A_1(y_{1/_2}),\ A_2(y_{3/_2}),\ A_3(y_{5/_2}),\ \ldots,\ A_k(y_{k-1/_2}).$$

I	II	III	IV	V	VI
k	x_k	y_k	$s_k = y_k + y_{k+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{k} s_n$	$F(x_k) = \frac{1}{2} h \sum\limits_{n=1}^{k} s_n$
0	a	y_0	$s_1 = y_0 + y_1$	0	0
1	$a + h$	y_1	$s_2 = y_1 + y_2$	s_1	$\frac{1}{2} h s_1$
2	$a + 2h$	y_2	$s_3 = y_2 + y_3$	$s_1 + s_2$	$\frac{1}{2} h (s_1 + s_2)$
3	$a + 3h$	y_3	$s_1 = y_3 + y_4$	$s_1 + s_2 + s_3$	$\frac{1}{2} h (s_1 + s_2 + s_3)$
4	$a + 4h$	y_4	$s_5 = y_4 + y_5$	$s_1 + s_2 + s_3 + s_4$	$\frac{1}{2} h (s_1 + s_2 + s_3 + s_4)$
5	$a + 5h$	y_5	$s_6 = y_5 + y_6$	$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5$	$\frac{1}{2} h (s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5)$
6	$a + 6h$	y_6		$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6$	$\frac{1}{2} h (s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6)$

На оси OX влево от точки O построим отрезок OP равный единице. Проведем лучи:

$$PA_1, PA_2, PA_3, \ldots, PA_k,$$

и через точки $M_0, M_1, M_2, \ldots$ — им параллельные, так что

$$M_0M_1 \parallel PA_1, \quad M_1M_2 \parallel PA_2, \; M_2M_3 \parallel PA_3, \ldots$$

Точки $M_0, M_1, M_2, \ldots$ и будут точками искомой приближенной интегральной кривой, так как нетрудно из чертежа убедиться, что

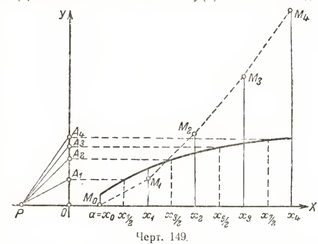
$$\overline{x_1M_1} = hy_{1/2}, \; \overline{x_2M_2} = h(y_{1/2} + y_{3/2}), \; \overline{x_3M_3} = h(y_{1/2} + y_{3/2} + y_{5/2}), \ldots,$$

а это, в силу приближенного равенства (51), показывает:

$$\overline{x_kM_k} = h(y_{1/2} + y_{3/2} + \ldots + y_{k-1/2}) = h\left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \ldots + \frac{y_{k-1} + y_k}{2}\right) = F(x_k)$$

в силу формулы (48).

Указанное построение проделано для того случая, когда масштаб для функции $F(x)$ совпадает с масштабом для $f(x)$. Если масштаб для площади



Черт. 149.

другой, то построение остается тем же с тою только разницей, что отрезок $\overline{OP}$ имеет длину не единицу, а l, причем l равно отношению масштаба для $F(x)$ к масштабу для $f(x)$.

Графическое приближенное построение повторного интеграла

$$\Phi(x) = \int_a^x dx \left(\int_a^x f(x)\,dx \right)$$

основано на формуле прямоугольников (40) [108].

Положим, как и раньше, что

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Рассматривая только значения $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ независимой переменной x, мы по формуле (40) имеем приближенное равенство:

$$F(x_1) \approx hy_0, \; F(x_2) \approx h(y_0 + y_1), \; \ldots, \; F(x_k) \approx h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{k-1}).$$

Применяя ту же формулу и к функции $\Phi(x)$, имеем:

$$\Phi(x_k) = h[F(x_0) + F(x_1) + \ldots + F(x_{k-1})] \approx$$
$$\approx h^2[y_0 + (y_0 + y_1) + \ldots + (y_0 + y_1 + \ldots + y_{k-1})]. \quad (52)$$

Отсюда вытекает следующее построение ординаты $\Phi(x_k)$ (черт. 150): построив точку P, как и раньше, мы на оси OY откладываем отрезки:

$$\overline{OB_1} = y_0, \; \overline{B_1B_2} = y_1,$$
$$\overline{B_2B_3} = y_2, \; \ldots, \; \overline{B_{k-1}B_k} = y_{k-1}, \; \ldots$$

Проведя лучи:

$$PB_1, \; PB_2, \; PB_3, \; \ldots, \; PB_k, \; \ldots,$$

строим точки:

$$M_0, \; M_1, \; M_2, \; \ldots, \; M_k, \; \ldots,$$

проводя

$$M_0M_1 \parallel PB_1, \quad M_1M_2 \parallel PB_2; \quad M_2M_3 \parallel PB_3, \ldots$$

Черт. 150.

Эти точки и будут точками искомой приближенной кривой, начерченной, однако, в неизменном масштабе $(1:h)$, ибо из построения ясно, что

$$\overline{x_1M_1} = hy_0, \; \overline{x_2M_2} = hy_0 + h(y_0 + y_1), \; \ldots, \; \overline{x_kM_k} =$$
$$= hy_0 + h(y_0 + y_1) + \ldots + h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{k-1}) \approx \frac{\Phi(x_k)}{h}$$

в силу (52). Если длина OP есть не единица, а l, то построенная кривая дает ординату кривой $\Phi(x)$, измененную в отношении $1:lh$.

Следует оговорить, что при всем удобстве указанных построений точность их невелика, и их можно употреблять лишь при сравнительно грубых расчетах.

113. Площади быстро колеблющихся кривых. Выше [110] было указано, что для успешного применения различных приближенных формул, для вычисления определенных интегралов надлежит разбивать кривую, площадь которой определяется, на участки, в каждом из которых она имеет плавную форму.

Это требование весьма затруднительно для кривых, ведущих себя неправильно, имеющих много колебаний вверх и вниз. Для определения площадей таких кривых по предыдущим правилам приходится вводить слишком много подразделений, что значительно усложняет вычисления.

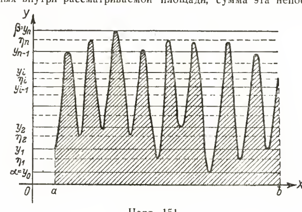
В таких случаях полезно применять другой способ, а именно разбивать площадь на полоски, параллельные не оси OY, а оси OX: для приближенного определения площади кривой, изображенной на черт. 151, откладываем на оси OY наименьшую и наибольшую ординаты α и β кривой и разделяем промежуток (α, β) на n частей в точках:

$$y_0 = \alpha, \; y_1, \ldots, y_{i-1}, \; y_i, \ldots, y_{n-1}, \; y_n = \beta.$$

Проведя через точки деления прямые, параллельные оси OX, мы разобьем всю площадь на полоски, состоящие из отдельных частей; за приближенное выражение площади i-й полоски мы можем принять произведение ее основания $(y_i - y_{i-1})$ на сумму длин l_i отрезков любой прямой

$$y = \eta_i \qquad (y_{i-1} \leqslant \eta_i \leqslant y_i),$$

заключенных внутри рассматриваемой площади; сумма эта непосредственно



Черт. 151.

может быть определена на чертеже. Обозначив эту сумму через l_i, мы получаем для искомой площади S приближенное выражение вида:

$$y_0(b-a) + (y_1 - y_0)\, l_1 + (y_2 - y_1)\, l_2 + \ldots + (y_n - y_{n-1})\, l_n,$$

которое будет тем точнее, чем больше число делений и чем круче колебания кривой.

Надлежащее развитие основной идеи этого способа привело к понятию об интеграле Лебега, значительно более общему, чем изложенное выше понятие об интеграле Римана [94, 116].

§ 11. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

114. Предварительные понятия. Последние номера настоящей главы будут посвящены строгому аналитическому рассмотрению понятия интеграла, и в дальнейшем мы докажем существование определенного предела у суммы вида:

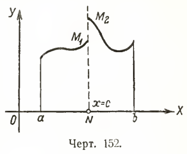
$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

не только для случая непрерывных функций. Для этого нам необходимо ввести некоторые новые понятия, связанные с рассмотрением разрывных функций. Пусть функция $f(x)$ определена в некотором конечном промежутке (a, b). Мы будем рассматривать только ограниченные функции, т. е. такие функции, все значения которых

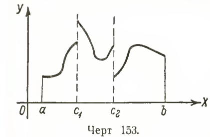
в упомянутом промежутке остаются по абсолютной величине меньшими некоторого определенного положительного числа, т. е. *функция $f(x)$ называется ограниченной в промежутке (a, b), если существует такое положительное число M, что при всяком x из упомянутого промежутка мы имеем:*

$$|f(x)| \leqslant M.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна, то, как мы уже упоминали [**35**], она достигает в этом промежутке наибольшего и наименьшего значений, а потому, очевидно, будет и ограниченной. Наоборот, разрывные функции могут быть как ограниченными, так и неограниченными. В дальнейшем мы будем рассматривать только ограниченные разрывные функции. Положим, например, что функция $f(x)$ имеет график, изображенный на черт. 152. В точке $x = c$ мы имеем разрыв непрерывности функции, и значение функции в самой точке $x = c$, т. е. $f(c)$, должно быть определено каким-нибудь образом путем дополнительного условия. В остальных точках промежутка, включая концы a и b, функция непрерывна. Кроме того, при стремлении переменной x к значению $x = c$ от меньших значений, т. е. слева, ордината $f(x)$ стремится к определенному пределу, геометрически изображаемому отрезом $\overline{NM_1}$. Точно так же при стремлении x к c от больших значений, т. е. справа, $f(x)$ стремится тоже к определенному пределу, изображаемому отрезком $\overline{NM_2}$, но этот последний предел отличен от упомянутого выше предела слева. Упомянутый предел слева обозначают обычно символом $f(c - 0)$, а предел справа — символом $f(c + 0)$ [**32**]. Этот наиболее простой *разрыв непрерывности функции, при котором существуют конечные определенные пределы как слева, так и справа, называется обычно разрывом первого рода.* Значение функции в самой точке $x = c$, т. е. $f(c)$, будет, вообще говоря, отличным как от $f(c - 0)$, так и от $f(c + 0)$ и должно быть определено дополнительно. Если функция непрерывна в промежутке (a, b), включая концы, за исключением конечного числа точек, в которых она имеет разрывы первого рода, то график такой функции состоит из конечного числа кривых, непрерывных вплоть до своих концов, и из отдельных точек в местах разрыва непрерывности (черт. 153). Такая функция, несмотря



Черт. 152.



Черт 153.

на свою разрывность, будет, очевидно, ограниченной во всем промежутке. Но, конечно, функции и с более сложными разрывами могут быть ограниченными.

В дальнейшем мы часто будем рассматривать множества всех значений, которые некоторая функция $f(x)$ принимает на каком-либо заданном промежутке изменения независимой переменной. Если взятая функция ограничена в рассматриваемом промежутке, то множество ее значений в этом промежутке ограничено сверху и снизу, а потому это множество имеет точную верхнюю и точную нижнюю границы [**39**]. Если, например, $f(x)$ — непрерывна в рассматриваемом промежутке (замкнутом), то, как известно [**35**], она достигает в этом промежутке наибольшего и наименьшего значений. В данном случае эти наибольшее и наименьшее значения функции и будут точными верхней и нижней границами значений $f(x)$ в рассматриваемом промежутке. Рассмотрим другой пример. Если функция $f(x)$ есть возрастающая функция, то она принимает наибольшее значение на правом конце промежутка и наименьшее — на левом. Эти значения, так же как и в предыдущем случае, будут точными верхней и нижней границами значений $f(x)$. В обоих рассмотренных примерах точные границы значений функции сами являлись частными значениями функции, т. е. сами принадлежали к рассматриваемой совокупности значений функции. В более сложных случаях разрывной функции точные границы значений функции могут сами и не являться значениями функции, т. е. могут и не принадлежать к множеству значений функции.

Пусть M и m — точные верхняя и нижняя границы значений $f(x)$ в некотором промежутке (c, d), т. е. при $c \leqslant x \leqslant d$, причем, очевидно, должно быть $m \leqslant M$. Возьмем новый промежуток (c', d'), который является лишь частью прежнего промежутка (c, d). Пусть M' и m' — точные верхняя и нижняя границы значений $f(x)$ в новом промежутке (c', d'). Так как множество всех значений $f(x)$ в промежутке (c', d'), во всяком случае, содержится среди значений $f(x)$ в более широком промежутке (c, d), то можно утверждать, что $M' \leqslant M$ и $m' \geqslant m$, т. е. *если некоторый промежуток изменения x заменить его частью, то точная верхняя граница значений функции $f(x)$ не может увеличиться, а точная нижняя граница не может уменьшиться.* Это обстоятельство будет для нас чрезвычайно важно в дальнейшем.

115. Теорема Дарбу. Пусть $f(x)$ — функция, ограниченная в промежутке (a, b), и m и M — точные нижняя и верхняя границы ее значений в этом промежутке. Разобьем (a, b) на части промежуточными значениями x:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

и введем в рассмотрение длины полученных частных промежутков $\delta_k = x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть $x = \xi_k$ — некоторое значение

из промежутка (x_{k-1}, x_k) $(k=1, 2, \ldots, n)$. Составим сумму произведений

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\delta_k. \tag{1}$$

Значение этой суммы зависит, во-первых, от способа разбиения всего промежутка (a, b) на части и, во-вторых, от выбора значений $x=\xi_k$ в каждом из полученных частных промежутков. Нашей задачей является исследование предела написанной суммы в том случае, когда число n частных промежутков беспредельно увеличивается и длина наибольшего из δ_k стремится к нулю. Необходимо выяснить, в каких случаях можно говорить об этом пределе, т. е. необходимо выяснить, для каких функций $f(x)$ сумма (1) будет стремиться к определенному пределу, не зависящему от способа разбиения всего промежутка на частные промежутки и выбора точек ξ_k.

Рассмотрим значения $f(x)$ в каждом из промежутков (x_{k-1}, x_k), и пусть M_k и m_k — точные верхняя и нижняя границы $f(x)$ в промежутке (x_{k-1}, x_k). Заменим в слагаемых суммы (1) множитель $f(\xi_k)$ множителем M_k или m_k.

Таким образом, мы придем к следующим двум суммам:

$$S=\sum_{k=1}^{n} M_k\delta_k; \tag{2}$$

$$s=\sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k, \tag{3}$$

причем из определения точных границ непосредственно вытекает неравенство

$$m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k,$$

откуда, ввиду положительности множителей δ_k, мы будем иметь:

$$s \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\delta_k \leqslant S. \tag{4}$$

Займемся подробным рассмотрением сумм S и s, а затем уже перейдем к более общей сумме (1). Числа M_k и m_k, согласно замечанию предыдущего номера, удовлетворяют во всяком случае неравенству

$$m \leqslant m_k \leqslant M_k \leqslant M$$

и кроме того, очевидно:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = b - a.$$

Отсюда непосредственно следуют неравенства:

$$m\delta_k \leqslant M_k\delta_k \leqslant M\delta_k \quad \text{и} \quad m\delta_k \leqslant m_k\delta_k \leqslant M\delta_k,$$

откуда, суммируя по k, получим:

$$m(b-a) \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k\delta_k \leqslant M(b-a) \ \text{ и } \ m(b-a) \leqslant \sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k \leqslant M(b-a),$$

т. е. при всяком разбиении промежутка на частные промежутки значения сумм S и s во всяком случае лежат между границами $m(b-a)$ и $M(b-a)$.

Если мы будем рассматривать всевозможные разбиения промежутка (a, b) на частные промежутки, то получим бесконечные множества значений как сумм (2), так и сумм (3). Из только что сказанного вытекает, что оба эти множества будут ограниченными совокупностями и, следовательно, оба эти множества будут иметь точные верхнюю и нижнюю границы.

Займемся более подробно суммой S, причем пока мы будем считать все значения функции $f(x)$ положительными. При этом все слагаемые в сумме S будут также положительными. Положим, что мы имеем некоторое определенное разбиение промежутка (a, b) на части δ_k и, следовательно, некоторое определенное значение суммы S.

Подвергнем наши промежутки δ_k [1]) дальнейшему раздроблению. Пусть, например, некоторый промежуток δ_k разбился на три части: $\delta_k^{(1)}$, $\delta_k^{(2)}$, $\delta_k^{(3)}$ и $M_k^{(1)}$, $M_k^{(2)}$, $M_k^{(3)}$ — точные верхние границы $f(x)$ в этих промежутках $\delta_k^{(1)}$, $\delta_k^{(2)}$, $\delta_k^{(3)}$.

В силу замечания предыдущего номера, эти точные верхние границы во всяком случае не больше точной верхней границы во всем промежутке δ_k, т. е.

$$M_k^{(1)}, \ M_k^{(2)} \ \text{ и } \ M_k^{(3)} \leqslant M_k \tag{5}$$

и, кроме того, очевидно:

$$\delta_k^{(1)} + \delta_k^{(2)} + \delta_k^{(3)} = \delta_k. \tag{6}$$

Слагаемое $M_k\delta_k$ взятой суммы S, после упомянутого раздробления δ_k на три части, заменится тремя слагаемыми:

$$M_k^{(1)}\delta_k^{(1)} + M_k^{(2)}\delta_k^{(2)} + M_k^{(3)}\delta_k^{(3)},$$

и, в силу соотношений (5) и (6), мы будем иметь:

$$M_k^{(1)}\delta_k^{(1)} + M_k^{(2)}\delta_k^{(2)} + M_k^{(3)}\delta_k^{(3)} \leqslant M_k\delta_k, \tag{7}$$

т. е. *если исходить из определенного разбиения промежутка на части и затем подразделить частные промежутки* δ_k *на еще*

---

[1]) Для краткости мы обозначаем сами промежутки и их длины одной и той же буквой δ_k.

более мелкие части, то сумма S может при этом только уменьшиться, точнее говоря, *не может увеличиться.* В дальнейшем нам придется рассматривать еще не всю новую сумму целиком, а лишь часть ее слагаемых, т. е. нам придется отбрасывать некоторые из слагаемых новой суммы, полученной после подразделения частных промежутков на более мелкие части. Так как все слагаемые положительны, то отбрасывание некоторых из них может только уменьшить величину всей суммы, т. е. после отбрасывания некоторых слагаемых величина новой суммы и подавно будет не больше той исходной суммы S, которую мы имели до подразделения частных промежутков δ_k на более мелкие части.

Мы сравнили между собою два значения суммы S при таких способах подразделения промежутка (a, b) на части, что одно подразделение получается из другого путем его разбиения на более мелкие части с сохранением всех прежних точек деления. Если сравнить два значения суммы S при любых разбиениях промежутка (a, b) на части, то вообще никакого простого соотношения между ними не будет. Но оказывается, что если при обоих законах разбиения длины частных промежутков δ_k достаточно малы, то значения суммы S в обоих случаях близки друг другу по величине. Точнее говоря, можно доказать, что при беспредельном увеличении числа делений n и при беспредельном уменьшении наибольшего из δ_k сумма S стремится к определенному пределу, не зависящему от закона деления промежутка (a, b) на части.

Мы переходим сейчас к доказательству этого важного для дальнейшего предложения.

Рассмотрим всевозможные значения суммы S, получаемые при всевозможных разбиениях промежутка (a, b) на части. Пусть L — точная нижняя граница этого ограниченного сверху и снизу множества значений сумм S. Мы покажем, что это число L и есть упомянутый выше предел для сумм S.

Согласно определению точной нижней границы, мы имеем для всех значений S неравенство $L \leqslant S$. Для того чтобы доказать наше утверждение о том, что L есть предел S, надо показать, что при любом заданном малом положительном ε будет существовать такое положительное число η, что всякое значение суммы S меньше $(L + \varepsilon)$, если только длины δ_k всех частичных промежутков меньше η.

По определению точной нижней границы L значений S существует такой вполне определенный закон (I) подразделения промежутка (a, b) на части δ'_k, что соответствующее этому закону значение суммы S, которое мы обозначим через S', будет меньше, чем $\left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Пусть p есть число точек подразделения всего промежутка (a, b) на части при этом законе (I) деления. Рассмотрим теперь какой угодно закон подразделения (II) (a, b) на части и пусть,

как всегда, (x_{k-1}, x_k) суть эти части и δ_k — их длины. Разделим все промежутки δ_k на два класса.

К первому классу отнесем те из них, которые целиком заключаются в одном из промежутков δ'_k, получаемых при первом из упомянутых законов подразделения, а ко второму классу отнесем те промежутки δ_k, которые налегают на несколько промежутков δ'_k. Пусть σ_l — длины промежутков первого класса, а τ_m — длины промежутков второго класса и пусть, кроме того, μ_l и ν_m — точные верхние границы $f(x)$ в этих промежутках σ_l и τ_m. Значки l и m пробегают некоторые целые значения, которые для нас не представляют интереса, и в дальнейшем, суммируя по этим значкам, мы не будем указывать пределов для суммы, подразумевая, что суммирование производится по всем промежуткам первого или второго класса. Разбивая промежутки δ_k на два класса, мы тем самым можем разбить всю сумму S при втором законе (II) подразделения на две суммы:

$$S = S_1 + S_2,$$

где

$$S_1 = \sum \mu_l \sigma_l; \qquad S_2 = \sum \nu_m \tau_m.$$

Всякий промежуток σ_l является частью некоторого промежутка δ'_k из первого основного закона (I) подразделения, но все промежутки σ_l не заполняют всех промежутков δ'_k, т. е. сумма S_1 может быть получена из суммы S' подразделением промежутков δ'_k на более мелкие части и выкидыванием некоторых слагаемых. По доказанному выше, мы можем поэтому утверждать, что сумма S_1 не больше суммы S', т. е., в силу $S' < L + \frac{\varepsilon}{2}$, мы можем написать:

$$S_1 < L + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7_1}$$

Рассмотрим теперь вторую сумму S_2. Промежутки τ_m налегают на несколько промежутков δ'_k (минимум на два) первого основного закона (I) подразделения, т. е. τ_m налегают на точки деления промежутка (a, b) на части по закону (I), а потому число слагаемых в сумме S_2 не больше числа p точек подразделения при этом законе (I) подразделения, причем p есть определенное целое положительное число. Множители ν_m не превосходят точной верхней границы M функции $f(x)$ во всем промежутке (a, b). Если мы обозначим буквой τ наибольшую из длин τ_m, то каждое из слагаемых в сумме S_2 будет не больше $M\tau$, и, следовательно, для всей суммы мы получим неравенство:

$$S_2 \leqslant M \cdot \tau \cdot p. \tag{8}$$

Возьмем теперь число η равным $\frac{\varepsilon}{2Mp}$ и покажем, что оно удовлетворяет поставленным выше условиям. Мы считаем, следовательно,

что длины δ_k всех частных промежутков при нашем законе (II) подразделения удовлетворяют неравенству:

$$\delta_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2Mp}. \tag{9}$$

Так как τ_m суть некоторые из промежутков δ_k, то и для них мы будем иметь $\tau_m \leqslant \frac{\varepsilon}{2Mp}$, т. е.

$$\tau \leqslant \frac{\varepsilon}{2Mp},$$

и неравенство (8) дает нам для суммы S_2 оценку:

$$S_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

Складывая неравенства (7_1) и (10), мы получим оценку и для всей суммы S:

$$S < L + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = L + \varepsilon.$$

Итак, при любом законе подразделения промежутка (a, b) на части, если только длины частных промежутков удовлетворяют неравенству (9), для суммы S мы имеем неравенство:

$$L \leqslant S < L + \varepsilon.$$

Ввиду произвольной малости заданного положительного числа ε, мы и заключаем отсюда, что L, действительно, является пределом для суммы S.

В предыдущем рассуждении мы полагали, что все значения $f(x)$ положительны. Если это не так, то, во всяком случае, ввиду ограниченности функции $f(x)$, можно прибавить к $f(x)$ такое положительное число A, чтобы новая функция $\psi(x) = f(x) + A$ была положительной. Для этой новой функции $\psi(x)$ наше утверждение, в силу предыдущего, можно считать доказанным, т. е. для этой новой функции сумма S имеет определенный предел. Принимая во внимание, что точная верхняя граница $\psi(x)$ в промежутке (x_{k-1}, x_k) при прежних обозначениях, очевидно, равна $M_k + A$, мы видим, что эта сумма имеет для функции $\psi(x)$ вид:

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k + A)\,\delta_k = \sum_{k=1}^{n} M_k\delta_k + A \sum_{k=1}^{n} \delta_k = \sum_{k=1}^{n} M_k\delta_k + A(b-a),$$

где, как и выше, M_k — точная верхняя граница $f(x)$ в промежутке δ_k.

Обращаемся к написанной выше формуле:

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k + A)\,\delta_k = \sum_{k=1}^{n} M_k\delta_k + A(b-a).$$

Как сказано выше, сумма, стоящая слева, имеет определенный предел, который равен точной нижней границе значений сумм, стоящих слева.

В правой части мы имеем два слагаемых, из которых одно $A(b-a)$ есть определенное число и, следовательно, мы можем утверждать, что второе слагаемое $\sum\limits_{k=1}^{n} M_k\delta_k$ также имеет определенный предел, который равен точной нижней границе множества значений написанных сумм.

Таким образом мы доказали, что для любой ограниченной функции $f(x)$ в конечном промежутке сумма S имеет определенный предел L. Точно таким же образом можно доказать, что и сумма (3) также стремится к определенному пределу l при беспредельном уменьшении наибольшего из δ_k. Это число l является точной верхней границей всех возможных значений суммы s при всевозможных разбиениях промежутка (a, b) на части. Кроме того, сравнивая выражения (2) и (3) для сумм S и s при одном и том же законе разбиения и принимая во внимание, что $m_k \leqslant M_k$, мы видим, что при одном и том же законе разбиения мы имеем, во всяком случае, $s \leqslant S$. Такое же неравенство мы получим, следовательно, и для пределов, т. е. $l \leqslant L$. Полученный результат мы формулируем в виде следующей теоремы, доказанной впервые французским математиком Дарбу:

Теорема Дарбу. *При беспредельном увеличении числа делений n и беспредельном уменьшении наибольшего из δ_k суммы s и S для всякой ограниченной в промежутке (a, b) функции стремятся к определенным пределам l и L, причем $l \leqslant L$.*

Выше мы сказали, что l есть верхняя граница значений s и L — нижняя граница значений S. Принимая во внимание доказанное неравенство $l \leqslant L$, мы можем, следовательно, утверждать, что $s \leqslant S$ и в том случае, если для составления s и S брать любые и разные законы разбиения.

116. Функции, интегрируемые в смысле Римана. Если мы обратимся теперь к общей сумме:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\delta_k \qquad (\delta_k = x_k - x_{k-1}), \tag{11}$$

то, как оказывается, для нее нельзя уже утверждать существование предела в случае любой ограниченной функции $f(x)$.

Числа ξ_k можно выбирать любым образом из промежутков (x_{k-1}, x_k), что создает некоторую неопределенность в величине множителей $f(\xi_k)$. Этот факт и влечет, в качестве своего следствия, то обстоятельство, что сумма (1) не всегда имеет определенный предел. Положим, например, что пределы l и L, о которых говорится в теореме

Дарбу, не одинаковы, т. е. что $l < L$. В силу определения точных верхней и нижней границ, мы можем выбирать числа ξ_k, с одной стороны, так, чтобы $f(\xi_k)$ было сколь угодно близким к m_k, с другой стороны, так, чтобы $f(\xi_k)$ было сколь угодно близким к M_k. В первом случае величина суммы (1) будет сколь угодно близкой к величине соответствующей суммы s, а во втором случае — к величине суммы S. Таким образом, при беспредельном уменьшении δ_k мы можем соответствующим подбором чисел ξ_k делать величину суммы (1) сколь угодно близкой или к l (предел для суммы s), или к L (предел для суммы S). Так как числа l и L по условию неодинаковы, то мы видим отсюда, что, при беспредельном возрастании n и при беспредельном уменьшении наибольшего из δ_k, сумма (11) не будет иметь определенного предела. Итак, *если* $l < L$, то *сумма* (11), *наверно, не имеет определенного предела.*

Покажем теперь, что если $l = L$, то сумма (1) имеет определенный предел, равный числу $l = L$. Действительно, в силу определения точных верхней и нижней границ, мы имеем $m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k$ и, следовательно, можно написать:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\delta_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k\delta_k.$$

При беспредельном уменьшении наибольшего из δ_k крайние члены этого неравенства имеют общий предел $l = L$, а следовательно, к этому же пределу должна стремиться и сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\delta_k$ при любом выборе точек ξ_k. Предел этой суммы, как мы знаем, и называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку (a, b), и если этот предел существует, то функция называется *интегрируемой* в смысле Римана, или просто — интегрируемой. В некоторых случаях дают понятию определенного интеграла иное определение, чем это было указано выше, при этом, конечно, и условие интегрируемости получается другое. Чтобы отличить данное выше понятие об определенном интеграле от других способов построения этого понятия, и говорят об интегрируемости в смысле Римана (немецкий математик середины XIX века). В дальнейшем мы будем иметь дело только с интегралами в смысле Римана, а потому не будем добавлять этого упоминания, и функции, интегрируемые в смысле Римана, будем просто называть интегрируемыми.

Из предыдущего вытекает, что *необходимое и достаточное условие интегрируемости* $f(x)$ *заключается в совпадении пределов* l *и* L *сумм* s *и* S, т. е. *в том, чтобы разность этих сумм:*

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,\delta_k \tag{12}$$

стремилась к нулю при беспредельном увеличении n и беспредельном уменьшении наибольшего из δ_k. Выясним некоторые классы функций, для которых это условие будет выполнено, т. е. выясним некоторые классы интегрируемых функций.

Сумма (12) состоит из неотрицательных слагаемых и ее величина не меньше $L-l$, ибо L есть точная нижняя граница сумм (2) и l — точная верхняя граница сумм (3). Принимая во внимание сказанное, а также теорему Дарбу, мы можем утверждать, что необходимое и достаточное условие интегрируемости, т. е. совпадения l и L, можно сформулировать следующим образом: *при любом заданном и положительном ε существует такое подразделение промежутка (a, b) на части, для которого сумма (12) меньше ε.*

I. Если $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b) (включая концы), то она равномерно непрерывна в этом промежутке. Кроме того, в каждом из промежутков δ_i она достигает своего наименьшего значения m_i и наибольшего значения M_i. В силу равномерной непрерывности $f(x)$ положительные разности $M_i - m_i$ при беспредельном уменьшении наибольшего из δ_i будут меньше любого положительного ε, и вся положительная сумма (12) будет меньше:

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\delta_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\delta_i = \varepsilon(b-a).$$

Ввиду произвольной малости ε, отсюда следует, что сумма (12) стремится к нулю, т. е. *всякая непрерывная функция будет и интегрируемой.*

II. Положим теперь, что $f(x)$ ограничена и имеет конечное число разрывов. Для определенности предположим, что она имеет одну точку разрыва $x=c$ внутри (a, b). Случай любого конечного числа точек разрыва можно рассмотреть таким же образом. Так как предел $L-l$ суммы (12) не зависит от способа разбиения промежутка (a, b) на части, то мы можем при доказательстве применять любой способ разбиения, лишь бы все δ_i стремились к нулю. Выделим точку $x=c$ из промежутка (a, b) некоторым малым промежутком (a_1, b_1) (черт. 154) так, чтобы c находилась внутри (a_1, b_1). Более точно этот промежуток мы определим в дальнейшем.

a a_1 c b_1 b

Черт. 154.

В силу ограниченности функции $f(x)$ мы имеем $|f(x)| < N$, т. е. все числа $M_i < N$ и все числа $m_i > -N$, так что

$$0 \leqslant M_i - m_i \leqslant 2N. \tag{13}$$

Пусть ε — любое малое заданное положительное число. Выбираем (a_1, b_1) так, чтобы

$$2N(b_1 - a_1) < \varepsilon. \tag{14}$$

Будем, при подразделении промежутка (a, b) на части, считать, что точки $x=a_1$ и $x=b_1$ входят в число точек деления. При этом сумма (12) разбивается на три части: сумму S_1, соответствующую промежутку (a, a_1); сумму S_2, соответствующую промежутку (b_1, b), и сумму S_3, соответствующую (a_1, b_1).

Функция $f(x)$ равномерно непрерывна в (a, a_1), и, как и в I, сумма S_1 стремится к нулю. То же относится и к сумме S_2, т. е. при всех достаточно малых δ_i суммы S_1 и S_2 будут меньше ε.

Для суммы S_3 суммирование в выражении (12) надо распространять на те δ_k, которые входят в промежуток (a_1, b_1), и сумма всех этих δ_k равна, очевидно, $(b_1 - a_1)$. Принимая еще во внимание (13), имеем:

$$0 \leqslant S_3 \leqslant \sum 2N\delta_k = 2N \sum \delta_k = 2N(b_1 - a_1),$$

где суммирование распространяется на указанные выше δ_k. В силу (14), имеем $S_3 < \varepsilon$, и вся положительная сумма (12) будет меньше 3ε. Отсюда, ввиду произвольной малости ε, можно заключить, что эта сумма стремится к нулю, т. е. *всякая ограниченная функция с конечным числом точек разрыва будет интегрируемой*. Мы имели такую функцию в первом примере из [97].

III. Рассмотрим тот случай, когда функция $f(x)$ — монотонная и ограниченная в промежутке (a, b). Для определенности предположим, что эта функция не убывает, т. е. если $c_1 < c_2$, то $f(c_1) \leqslant f(c_2)$. При этом в каждом из промежутков δ_i мы будем иметь $M_i = f(x_i)$ и $m_i = f(x_{i-1})$. Сумма (12) будет:

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1}).$$

Обозначим через Δ наибольшую из разностей $(x_i - x_{i-1})$. По условию, $\Delta \to 0$. В силу условия $f(x_i) - f(x_{i-1}) \geqslant 0$ можем написать:

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1}) \leqslant \Delta \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})],$$

т. е.

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1}) \leqslant \Delta [f(b) - f(a)],$$

ибо, очевидно:

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = [f(x_1) - f(a)] + [f(x_2) - f(x_1)] + \ldots + \\ + [f(b) - f(x_{n-1})] = f(b) - f(a).$$

Отсюда видим непосредственно, что сумма (12) стремится к нулю, т. е. *всякая монотонная ограниченная функция будет интегрируемой функцией*. Заметим, что монотонная функция может иметь и бесчисленное множество точек разрыва, так что случай (III) не исчерпывается случаем (II). В качестве примера можем привести функцию, равную нулю при $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$, равную $\frac{1}{2}$ при $\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{2}{3}$, равную $\frac{2}{3}$ при $\frac{2}{3} \leqslant x < \frac{3}{4}$, и т. д. и, наконец, равную 1 при $x = 1$.

У этой неубывающей функции точками разрыва будут значения:

$$x = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

Упомянем о том, что монотонная ограниченная функция должна иметь во всякой точке разрыва $x = c$ пределы $f(c - 0)$ и $f(c + 0)$. Это непосредственно следует из существования предела у монотонной и ограниченной последовательности чисел [30].

При выводе условий интегрируемости мы всегда предполагали $f(x)$ ограниченной. Можно доказать, что это условие является необходимым условием интегрируемости, т. е. существования определенного предела у суммы (11). Если это условие ограниченности не выполнено, то все же в некоторых случаях можно определить интеграл от $f(x)$ по промежутку (a, b), но уже не как предел суммы (11). В этом случае интеграл называется несобственным. Основы учения о несобственном интеграле выяснены нами в [97]. Более подробно это будет изложено во втором томе.

Если промежуток интегрирования (a, b) бесконечен в одну или в обе стороны, то понятие об определенном интеграле по такому промежутку также не приводится непосредственно к пределу суммы вида (11). В этом случае мы имеем тоже несобственный интеграл (см. [98] и второй том).

117. Свойства интегрируемых функций. Пользуясь найденным выше необходимым и достаточным условием интегрируемости, нетрудно выяснить основные свойства интегрируемых функций.

I. *Если $f(x)$ интегрируема в промежутке (a, b), и мы изменим произвольно значения $f(x)$ в конечном числе точек из (a, b), то новая функция будет также интегрируема в (a, b) и величина интеграла от этого не изменится.*

Ограничимся рассмотрением того случая, когда мы изменили значение $f(x)$ в одной точке, например в точке $x = a$. Новая функция $\varphi(x)$ везде совпадает с $f(x)$, кроме $x = a$, а $\varphi(a)$ берем произвольно. Пусть m и M — точные нижняя и верхняя границы $f(x)$ в (a, b). Точная нижняя граница $\varphi(x)$ будет, очевидно, больше или равна m, если $\varphi(a) \geqslant m$, и будет $\varphi(a)$, если $\varphi(a) < m$. Точно так же точная верхняя граница $\varphi(x)$ будет меньше или равна M, если $\varphi(a) \leqslant M$, и будет $\varphi(a)$, если $\varphi(a) > M$. Сравнивая сумму (12) для $f(x)$ и $\varphi(x)$, замечаем, что разница может быть только в первом слагаемом (при $k = 1$). Но это первое слагаемое, очевидно, для $f(x)$ и $\varphi(x)$ стремится к нулю, так как $\delta_1 \to 0$ и $(M_1 - m_1)$ ограничено. Сумма остальных слагаемых, кроме первого, также, очевидно, стремится к нулю, так как $f(x)$ интегрируема, и вся сумма (12) для $f(x)$ должна стремиться к нулю. Интегрируемость $\varphi(x)$ доказана. Совпадение значений интеграла для $f(x)$ и $\varphi(x)$ очевидно, ибо при составлении сумм (11) мы всегда можем считать ξ_1 отличным от a, а значения $f(x)$ и $\varphi(x)$ во всех точках, кроме $x = a$, совпадают.

II. *Если $f(x)$ интегрируема в промежутке (a, b), то она интегрируема в любом промежутке (c, d), составляющем часть (a, b).*

Мы можем предположить всегда при вычислении пределов l и L для s и S, что точки c и d входят в состав точек деления при разбиении (a, b) на части. При этом сумма (12) для промежутка (c, d) получается из суммы (12) для промежутка (a, b) просто выбрасыванием слагаемых, соответствующих промежутку (a, c) и (d, b). Принимая во внимание, что слагаемые неотрицательны, можем утверждать, что сумма (12) для промежутка (c, d) меньше или равна значению этой суммы для промежутка (a, b), и раз последняя сумма стремится к нулю [$f(x)$ интегрируема в (a, b)], то первая сумма и

подавно стремится к нулю, т. е. $f(x)$ интегрируема в (c, d). Заметим, что c может совпадать с a, а d может совпадать с b. Совершенно так же, как и в [94], доказывается равенство:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad (a < c < b).$$

III. *Если $f(x)$ интегрируема в (a, b), то и $cf(x)$, при любом постоянном c, также интегрируема в (a, b).*

Считая, например, $c > 0$, можно утверждать, что для функции $cf(x)$ надо заменить прежние m_k и M_k на cm_k и cM_k. Сумма (12) приобретет лишь множитель c и будет попрежнему стремиться к нулю. Свойство V из [94], очевидно, сохраняется и доказывается попрежнему.

IV. *Если* $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — функции, *интегрируемые* в (a, b), то их сумма $\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ *также интегрируема* в (a, b).

Пусть m'_k, M'_k, m''_k, M''_k — точные нижние и верхние границы $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в промежутке (x_{k-1}, x_k). Таким образом, все значения $f_1(x)$ в промежутке (x_{k-1}, x_k) больше или равны m'_k, а все значения $f_2(x)$ там же больше или равны m''_k. Отсюда $\varphi(x) \geqslant m'_k + m''_k$ в промежутке (x_{k-1}, x_k). Точно так же доказывается, что $\varphi(x) \leqslant M'_k + M''_k$ в промежутке (x_{k-1}, x_k). Обозначая через m_k и M_k точную нижнюю и точную верхнюю границы $\varphi(x)$ в промежутке (x_{k-1}, x_k), имеем, таким образом, $m_k \geqslant m'_k + m''_k$ и $M_k \leqslant M'_k + M''_k$, откуда следует неравенство:

$$M_k - m_k \leqslant (M'_k + M''_k) - (m'_k + m''_k),$$

т. е.

$$M_k - m_k \leqslant (M'_k - m'_k) + (M''_k - m''_k).$$

Составляя сумму (12) для $\varphi(x)$, получим:

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,\delta_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} (M'_k - m'_k)\,\delta_k + \sum_{k=1}^{n} (M''_k - m''_k)\,\delta_k.$$

Обе суммы, стоящие справа, стремятся к нулю, так как функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ по условию интегрируемы. Следовательно, сумма (12) для $\varphi(x)$, т. е. сумма

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,\delta_k,$$

и подавно стремится к нулю, т. е. $\varphi(x)$ также интегрируема. Доказательство распространяется легко на случай алгебраической суммы любого конечного числа слагаемых. Свойство VI из [94] доказывается, как и раньше.

Аналогично предыдущему доказываются следующие свойства:

V. *Произведение* $f_1(x) f_2(x)$ *двух функций, интегрируемых в* (a, b), *будет функция, также интегрируемая в* (a, b).

VI. *Если* $f(x)$ *интегрируема в* (a, b) *и точные нижняя и верхняя границы* m *и* M *функции* $f(x)$ *в* (a, b) *одного и того же знака, то и* $\frac{1}{f(x)}$ *есть функция, интегрируемая в* (a, b).

VII. *Если* $f(x)$ *интегрируема в* (a, b), *то и ее абсолютное значение* $|f(x)|$ *также есть функция, интегрируемая в* (a, b).

Неравенство (10) из [95] может быть доказано, как и выше. Совершенно так же остается справедливым и свойство VII из [95], если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — интегрируемые функции. Теорема о среднем читается так: если $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы в промежутке (a, b) и $\varphi(x)$ сохраняет знак в этом промежутке, то

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) \, dx = \mu \int_a^b \varphi(x) \, dx,$$

где μ — некоторое число, удовлетворяющее неравенству $m \leqslant \mu \leqslant M$, а m и M — точные нижняя и верхняя границы $f(x)$ в (a, b). В частности:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \mu (b - a).$$

Доказательство будет таким же, что и раньше [95]. Пользуясь этой формулой, нетрудно установить, что

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

есть непрерывная функция от x, и $F'(x) = f(x)$ при всех значениях x, где $f(x)$ непрерывна. Наконец, установим основную формулу интегрального исчисления для интегрируемых функций. Пусть $F_1(x)$ — непрерывная в промежутке (a, b) функция, и при любом значении x внутри промежутка (a, b) имеется производная $F_1'(x) = f(x)$, где $f(x)$ — интегрируемая в (a, b) функция.

При этом имеет место основная формула:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F_1(b) - F_1(a).$$

Разбивая промежуток на части и применяя к каждой части (x_{k-1}, x_k) формулу конечных приращений [63], можем написать:

$$F_1(x_k) - F_1(x_{k-1}) = F_1'(\xi_k) \delta_k = f(\xi_k) \delta_k \qquad (x_{k-1} < \xi_k < x_k). \tag{15}$$

Далее, суммируя по k и принимая во внимание, что (III из [116]):

$$\sum_{k=1}^{n} [F_1(x_k) - F_1(x_{k-1})] = F_1(b) - F_1(a),$$

мы получим:

$$F_1(b) - F_1(a) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\delta_k.$$

Равенство это справедливо при любом разбиении промежутка (a, b) на части ввиду специального выбора точек ξ_k, определяемого формулой конечных приращений (15). Переходя к пределу, получим вместо суммы — интеграл:

$$F_1(b) - F_1(a) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать. Заметим, что при определении интеграла значения $f(x)$ на концах промежутка (a, b) не играют роли, в силу свойства I настоящего номера.

ГЛАВА IV

РЯДЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

§ 12. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ИЗ ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ

118. Понятие о бесконечном ряде. Пусть дана бесконечная последовательность чисел:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots \tag{1}$$

Составив сумму n первых членов последовательности

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \tag{2}$$

мы получим, таким образом, другую бесконечную последовательность чисел

$$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots$$

Если при беспредельном возрастании n, величина s_n стремится к пределу (конечному):

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n,$$

говорят, что бесконечный ряд:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{3}$$

сходится и имеет сумму s, и пишут:

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{4}$$

Если же s_n не стремится к пределу, то говорят, что бесконечный ряд (3) *расходится.*

Иначе говоря, *бесконечный ряд* (3) *называется сходящимся, если сумма его первых n слагаемых при беспредельном возрастании n стремится к пределу, и этот предел называется суммою ряда.*

О сумме бесконечного ряда можно говорить только тогда, когда он сходится, и тогда сумма n первых членов ряда s_n оказывается

приближенным выражением для суммы ряда s. Погрешность r_n этого приближенного выражения, т. е. разность

$$r_n = s - s_n,$$

называется *остатком* ряда.

Очевидно, что остаток r_n есть в свою очередь сумма бесконечного ряда, который получается из данного ряда (1), если в нем отбросить первые n членов с начала:

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} + \ldots$$

Точная величина этого остатка в большинстве случаев остается неизвестной, и потому особенно важной является *приближенная оценка* этого остатка.

Простейший пример бесконечного ряда представляет геометрическая прогрессия:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \qquad (a \neq 0). \tag{5}$$

Рассмотрим отдельно случаи:

$$|q| < 1, \quad |q| > 1, \quad q = 1, \quad q = -1.$$

Мы знаем [27], что при $|q| < 1$ геометрическая прогрессия имеет конечную сумму $s = \frac{a}{1-q}$, и потому оказывается сходящимся рядом; действительно, при этом:

$$s_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q},$$

$$s - s_n = \frac{a}{1-q} - \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{aq^n}{1-q},$$

и $s - s_n \to 0$ при $n \to \infty$, так как $q^n \to 0$ при $|q| < 1$ [26]. При $|q| > 1$ из выражения s_n видно, что $s_n \to \infty$ при $n \to \infty$, так как $q^n \to \infty$ при $|q| > 1$ [29]. При $q = 1$ мы имеем $s_n = an$, и, очевидно, также $s_n \to \infty$, так что при $|q| > 1$ и $q = 1$ геометрическая прогрессия оказывается расходящимся рядом. При $q = -1$ мы получаем ряд:

$$a - a + a - a + \ldots$$

Сумма s_n первых n его членов равна нулю, если n четное, и равна a, если n нечетное, т. е. s_n не стремится к пределу, и ряд расходится; однако при всех значениях n эта сумма в отличие от предыдущего случая остается ограниченной, так как принимает только значения 0 и a.

Если абсолютная величина s_n — суммы n первых членов ряда (3) — *стремится к бесконечности при беспредельном возрастании n, то ряд* (1) *называется собственно расходящимся.* В дальнейшем, говоря о собственно расходящемся ряде, мы для краткости будем говорить просто „расходящийся ряд“.

119. Основные свойства бесконечных рядов. Сходящиеся бесконечные ряды обладают некоторыми свойствами, которые позволяют действовать с ними, как с конечными суммами.

I. *Если ряд*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

имеет сумму s, то ряд

$$au_1 + au_2 + \ldots + au_n + \ldots, \qquad (6)$$

получаемый из предыдущего умножением всех членов на одно и то же число a, имеет сумму as, ибо сумма σ_n первых n членов ряда (6) есть

$$\sigma_n = au_1 + au_2 + \ldots + au_n = as_n,$$

а потому

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} as_n = a \lim_{n\to\infty} s_n = as.$$

II. *Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать*, т. е., *если*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = s,$$
$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sigma,$$

то ряд

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots, \qquad (7)$$

также сходится, и сумма его равна $s \pm \sigma$, ибо сумма первых членов ряда

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) = s_n \pm \sigma_n.$$

Другие свойства суммы, например независимость суммы от порядка слагаемых, правило перемножения двух сумм и т. п., в применении к бесконечным рядам будут рассмотрены ниже в § 14. Заметим пока, что они справедливы не для всякого ряда. Сочетательный закон справедлив, очевидно, для любого сходящегося ряда, т. е. можно объединять в группы любые рядом стоящие слагаемые. Это сводится к тому, что вместо всех s_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) мы берем только часть s_n, что не меняет предела s.

III. *Свойство сходимости или расходимости ряда не нарушится, если в ряде отбросить или приписать к нему любое конечное число членов с начала.* Действительно, рассмотрим два ряда:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$$
$$u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + \ldots$$

Второй получается из первого отбрасыванием первых двух слагаемых. Если обозначить через s_n' — сумму первых n членов первого ряда, а через σ_n — то же для второго ряда, то, очевидно:

$$\sigma_{n-2} = s_n - (u_1 + u_2), \qquad s_n = \sigma_{n-2} + (u_1 + u_2),$$

причем, если $n \to \infty$, то и значок $(n-2) \to \infty$. Отсюда видно, что если s_n имеет предел, то и σ_{n-2} имеет предел, и наоборот. Эти пределы s и σ, т. е. суммы взятых двух рядов, будут, конечно, различны, а именно: $\sigma = s - (u_1 + u_2)$.

IV. *Общий член u_n сходящегося ряда стремится к нулю при беспредельном возрастании n:*

$$\lim u_n = 0, \tag{8}$$

ибо очевидно, что

$$u_n = s_n - s_{n-1},$$

и, если ряд сходится и имеет сумму s, то

$$\lim s_{n-1} = \lim s_n = s,$$

откуда

$$\lim u_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0.$$

Таким образом, условие (8) необходимо для сходимости ряда, но оно не достаточно: общий член ряда может стремиться к нулю, и ряд все же может быть расходящимся.

Пример. Гармонический ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \tag{9}$$

Здесь мы имеем:

$$u_n = \frac{1}{n} \to 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Нетрудно, однако, показать, что сумма n первых членов ряда (9) беспредельно возрастает. Для этого сгруппируем слагаемые, начиная со второго, в группы из 1, 2, 4, 8, ... членов:

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots,$$

так что в k-й группе будет 2^{k-1} членов. Если в каждой группе заменим все члены последним, наименьшим членом группы, то получится ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot 8 + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots, \tag{10}$$

сумма первых n членов которого, равная $\left[1 + \frac{1}{2}(n-1)\right]$, стремится, очевидно, к $(+\infty)$. Взяв достаточно большое число членов ряда (9), мы можем получить какое угодно число n групп, и сумма этих членов будет еще больше, чем $\left[1 + \frac{1}{2}(n-1)\right]$, и отсюда видно, что для ряда (9) $s_n \to +\infty$.

120. Ряды с положительными членами. Признаки сходимости. Особенное значение имеют ряды с положительными (не отрицательными) членами, для которых все числа:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots \geqslant 0.$$

Для них мы установим ряд признаков сходимости и расходимости.

1. *Ряд с положительными членами может быть только либо сходящимся, либо же собственно расходящимся; для такого ряда*

$$s_n \to s \quad \text{или} \quad s_n \to +\infty.$$

Для того чтобы ряд с положительными членами был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы сумма s_n его первых членов при всяком n оставалась меньше некоторой постоянной A, не зависящей от n.

Действительно, для такого ряда сумма s_n не убывает при возрастании n, так как при этом добавляются новые положительные (неотрицательные) слагаемые, и все наши утверждения вытекают из разобранных раньше свойств возрастающих переменных [30].

Для суждения о сходимости или расходимости рядов с положительными членами часто полезно бывает сравнить их с другими, более простыми рядами, чаще всего с геометрической прогрессией. Для этого мы установим признак:

2. *Если каждый член ряда с положительными членами*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{11}$$

начиная с некоторого члена, не превосходит соответствующего члена сходящегося ряда

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{12}$$

то и данный ряд также сходится.

Если же, наоборот, каждый член ряда (11), *начиная с некоторого n, не меньше соответствующего члена расходящегося ряда* (12) *с положительными членами, то и данный ряд также расходится.*

Допустим сперва, что мы имеем:

$$u_n \leqslant v_n, \tag{13}$$

причем ряд (12) сходится. Не ограничивая общности, мы можем считать, что это неравенство выполняется при всех значениях n, отбросив, в случае надобности, те первые члены, для коих оно не выполняется (свойство III [119]). Обозначив через s_n сумму n первых членов ряда (11), через σ_n — аналогичную сумму для ряда (12), мы имеем в силу (13):

$$s_n \leqslant \sigma_n.$$

Но ряд (12) по условию сходится, и, обозначив через σ сумму ряда (12), имеем:

$$\sigma_n \leqslant \sigma,$$

а потому и

$$s_n \leqslant \sigma,$$

откуда, в силу 1, вытекает сходимость ряда (11).

Пусть теперь выполняется неравенство

$$u_n \geqslant v_n. \tag{14}$$

Мы имеем, очевидно,

$$s_n \geqslant \sigma_n; \tag{15}$$

но ряд (12) теперь расходится, и сумма σ_n первых его n членов может быть сделана больше сколь угодно большого данного наперед числа; тем же свойством, в силу (15), обладает и s_n, т. е. ряд (11) будет также расходящимся.

Замечание. Из сходимости (или расходимости) ряда (12) вытекает и сходимость (или расходимость) ряда

$$kv_1 + kv_2 + kv_3 + \ldots + kv_n + \ldots,$$

где k — какое угодно постоянное положительное число.

Действительно, из сходимости ряда $\sum v_n$ вытекает и сходимость ряда $\sum kv_n$ в силу I [119]. Наоборот, если $\sum v_n$ расходится, то и ряд $\sum kv_n$ должен быть расходящимся, ибо, если бы он сходился, то, умножая его члены на $\frac{1}{k}$, мы, в силу I [119], имели бы и сходимость ряда $\sum v_n$. Из сказанного вытекает:

Ряд (11) *сходится, если*

$$u_n \leqslant kv_n, \tag{16}$$

причем ряд $\sum v_n$ — *сходящийся и* k — *какое-нибудь положительное число; ряд* (11) *расходится, если*

$$u_n \geqslant kv_n, \tag{17}$$

причем ряд $\sum v_n$ — *расходящийся.*

Сравнивая данный ряд с геометрической прогрессией, мы получим два основных признака сходимости рядов с положительными членами.

121. Признаки Коши и Даламбера. 3. Признак Коши. *Если общий член ряда с положительными членами* (11):

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

начиная с некоторого значения n, удовлетворяет неравенству:

$$\sqrt[n]{u_n} \leqslant q < 1, \tag{18}$$

где q не зависит от n, то ряд сходится.

Если же, наоборот, начиная с некоторого значения, имеем:

$$\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1. \tag{19}$$

то ряд (11) *расходится.*

Не ограничивая общности, можем допустить, что неравенства (18) или (19) выполняются при всех значениях n (свойство III [119]). Если выполнено (18), то

$$u_n \leqslant q^n,$$

т. е. общий член данного ряда не превосходит соответствующего члена бесконечной убывающей геометрической прогрессии, а потому, в силу 2, ряд будет сходящимся. В случае же (19), имеем:

$$u_n \geqslant 1,$$

и ряд (11), общий член которого не стремится к нулю (больше единицы), не может быть сходящимся (свойство IV [119]).

4. Признак Даламбера. *Если отношение последующего члена ряда к предыдущему* $\frac{u_n}{u_{n-1}}$, *начиная с некоторого значения* n, *удовлетворяет неравенству:*

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant q < 1, \tag{20}$$

где q *не зависит от* n, *то ряд* (11) *сходится.*

Если же, наоборот, начиная с некоторого значения n, *имеем:*

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \geqslant 1, \tag{21}$$

то данный ряд расходится.

Допустив, как и раньше, что неравенства (20) или (21) выполняются при всех значениях n в случае (20), мы имеем:

$$u_n \leqslant u_{n-1}q, \quad u_{n-1} \leqslant u_{n-2}q, \quad u_{n-2} \leqslant u_{n-3}q, \ \ldots, \ u_2 \leqslant u_1 q,$$

откуда, перемножая почленно и сокращая общие множители,

$$u_n \leqslant u_1 q^{n-1},$$

т. е. члены ряда меньше членов убывающей геометрической прогрессии:

$$u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \ldots + u_1 q^{n-1} + \ldots \quad (0 < q < 1),$$

и, в силу 2, ряд (11) сходится. В случае же (21):

$$u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant \ldots \leqslant u_{n-1} \leqslant u_n \leqslant \ldots,$$

т. е. члены ряда не убывают по мере удаления от начала, следовательно, u_n не стремится к нулю при $n \to \infty$, и ряд сходиться не может (свойство IV [119]).

Следствие. *Если при беспредельном возрастании n:*

$$\sqrt[n]{u_n} \quad \text{или} \quad \frac{u_n}{u_{n-1}} \tag{22}$$

стремится к конечному пределу r, то ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n \ldots,$$

наверно, сходится при условии $r < 1$ *и расходится при условии* $r > 1$.

Пусть сперва $r < 1$. Выберем число ε настолько малым, чтобы было также и

$$r + \varepsilon < 1.$$

При больших значениях n величина $\sqrt[n]{u_n}$ или $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ будет отличаться от своего предела r не больше, чем на ε, т. е. мы, начиная с некоторого достаточно большого значения n, будем иметь:

$$r - \varepsilon \leqslant \sqrt[n]{u_n} \leqslant r + \varepsilon < 1 \tag{23$_1$}$$

или

$$r - \varepsilon \leqslant \frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant r + \varepsilon < 1. \tag{23$_2$}$$

Применяя признаки Коши или Даламбера при $q = r + \varepsilon < 1$, в силу (23_1) или (23_2), сразу заключаем о сходимости данного ряда.

Аналогичным образом доказывается и расходимость его при условии $r > 1$. Совершенно так же ряд расходится, если хоть одно из выражений (22) стремится к $(+\infty)$.

Примеры. 1. Ряд

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{24}$$

Применяя признак Даламбера:

$$u_{n+1} = \frac{x^n}{n!}, \quad u_n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

а потому данный ряд сходится при всех конечных значениях x (положительных).

2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \tag{25}$$

Здесь мы имеем:

$$u_n = \frac{x^n}{n}, \quad u_{n-1} = \frac{x^{n-1}}{n-1}, \quad \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{n-1}{n} x \to x,$$

а потому, по признаку Даламбера, данный ряд сходится при $0 \leqslant x < 1$ и расходится при $x > 1$.

3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin^2 n\alpha. \tag{26}$$

Применяя признак Коши, имеем:

$$u_n = r^n \sin^2 n\alpha, \quad \sqrt[n]{u_n} = r\sqrt[n]{\sin^2 n\alpha} \leqslant r,$$

а потому данный ряд, наверно, сходится, если $r < 1$.

Признак Даламбера в данном случае не дает никакого результата, ибо отношение:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = r\left[\frac{\sin n\alpha}{\sin(n-1)\alpha}\right]^2$$

не стремится ни к какому пределу и даже не остается все время < 1 или $\geqslant 1$.

Вообще можно показать, что признак Коши сильнее признака Даламбера, т. е. он может применяться во всех случаях, когда применяется признак Даламбера, но сверх того и в некоторых других, когда последний не может применяться. Но зато пользование им сложнее, чем признаком Даламбера, в чем нетрудно убедиться хотя бы на первых двух из разобранных выше примерах.

Заметим, далее, что бывают случаи, когда и признак Коши и признак Даламбера применяться не могут; это случается, например, всякий раз, когда

$$\sqrt[n]{u_n} \text{ и } \frac{u_n}{u_{n-1}} \to 1,$$

т. е. когда $r = 1$. Мы имеем тогда дело с *сомнительным* случаем, когда вопрос о сходимости или расходимости должен быть разрешен каким-либо иным путем.

Так, например, для гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

который, как мы видели в [119], есть ряд *расходящийся*, мы имеем:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{n-1}{n} \to 1, \quad \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}} \to 1,$$ [1]

[1]) В предыдущих вычислениях существенно обратить внимание на то, что если положить $x = \frac{1}{n}$, то $x \to 0$ и $\frac{1}{n}\log\frac{1}{n} = x\log x \to 0$ [66]. Отсюда, логарифмируя выражение $\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$, убеждаемся, что оно стремится к единице.

и, таким образом, вопрос о сходимости или расходимости гармонического ряда не мог быть решен с помощью признаков Коши или Даламбера.

С другой стороны, дальше мы докажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

есть ряд *сходящийся*.

Но для него мы имеем опять:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \to 1, \quad \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^2 \to 1,$$

т. е. опять-таки сомнительный случай, если применять признаки Коши или Даламбера.

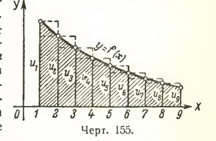
122. Интегральный признак сходимости Коши. Предположим, что члены данного ряда:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (27)$$

положительны и не возрастают, т. е.

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \ldots > 0. \qquad (28)$$

Изобразим члены ряда графически, откладывая по оси абсцисс независимую переменную n, принимающую пока только целые значения, а по оси ординат — соответствующие значения u_n (черт. 155). Всегда можно найти такую непрерывную функцию $y = f(x)$, которая при целых значениях $x = n$ принимает как раз значения u_n; для этого достаточно провести непрерывную кривую через все построенные точки; будем при этом считать, что и функция $y = f(x)$ не возрастающая.



Черт. 155.

При таком графическом изображении сумма n первых членов данного ряда

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

представится как сумма площадей „выходящих“ прямоугольников, которая заключает внутри себя площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью OX и ординатами $x = 1$, $x = n + 1$, а потому

$$s_n \geqslant \int_1^{n+1} f(x)\,dx. \qquad (29)$$

С другой стороны, та же фигура заключает внутри себя все „входящие" прямоугольники, сумма площадей которых равна:

$$u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{n+1} = s_{n+1} - u_1, \qquad (30)$$

а потому

$$s_{n+1} - u_1 \leqslant \int_1^{n+1} f(x)\,dx. \qquad (31)$$

Эти неравенства приводят нас к следующему признаку.

5. Интегральный признак Коши. *Ряд* (27)

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \quad u_n = f(n),$$

члены которого положительны и не возрастают при возрастании n, сходится или собственно расходится, смотря по тому, имеет ли интеграл

$$I = \int_1^{\infty} f(x)\,dx \qquad (32)$$

конечное значение или равен бесконечности.

Напомним при этом, что $f(x)$ должна убывать при возрастании x.

Пусть сперва интеграл I имеет конечное значение, т. е. кривая $y = f(x)$ имеет конечную площадь [98]. Из положительности $f(x)$ вытекает:

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx < \int_1^{\infty} f(x)\,dx,$$

а потому, в силу (31):

$$s_n < s_{n+1} \leqslant u_1 + I,$$

т. е. сумма s_n остается ограниченной при всех значениях n, и на основании признака I [120] ряд (27) будет сходящимся.

Пусть теперь $I = \infty$, т. е. интеграл

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

при увеличении n может быть сделан больше любого заданного наперед числа N. Тогда в силу (29) и сумма s_n может быть сделана больше N, т. е. ряд (27) будет собственно расходящимся.

Аналогичным путем можно показать, что *остаток ряда* (27) *не превосходит интеграла*

$$\int_n^{\infty} f(x)\,dx.$$

Замечание. *Вместо интеграла I при применении признака Коши можно брать интеграл*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx,$$

где a — любое положительное число, большее единицы.

В самом деле, если кривая $y=f(x)$ имеет конечную площадь, отсчитываемую от ординаты $x=1$, то конечной будет площадь ее, отсчитываемая от любой ординаты $x=a$, и обратно. Если $I=\infty$, то иначе говорят, что интеграл (32) расходится.

Примеры. 1. Гармоиический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Здесь мы имеем:

$$f(n)=\frac{1}{n},$$

а потому можио положить:

$$f(x)=\frac{1}{x};$$

тогда

$$I=\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\log x\,\Big|_1^\infty$$

и иитеграл расходится, ибо $\log x \to +\infty$ при $x \to +\infty$; даниый ряд, как мы уже зиаем, расходящийся.

2. Более общий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \tag{33}$$

где p — любое число, большее иуля (при $p \leqslant 0$ ряд, очевидио, расходящийся). Здесь мы имеем:

$$f(n)=\frac{1}{n^p}, \quad f(x)=\frac{1}{x^p}, \quad I=\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}=\begin{cases} \dfrac{1}{1-p}\,x^{1-p}\Big|_1^\infty, & \text{если } p\neq 1, \\ \log x\,\Big|_1^\infty, & \text{если } p=1. \end{cases}$$

Отсюда ясно, что иитеграл расходится, если $p \leqslant 1$, и сходится и равеи $\frac{1}{p-1}$, если $p>1$. Действительно, в последием случае показатель $1-p<0$, $x^{1-p}=\frac{1}{x^{p-1}} \to 0$ при $x \to +\infty$, и, следовательио:

$$\frac{1}{1-p}\,x^{1-p}\Big|_1^\infty = 0-\frac{1}{1-p}=\frac{1}{p-1}.$$

Следовательио, в силу признака Коши, ряд (33) *будет сходящимся, если* $p>1$, и *расходящимся, если* $p \leqslant 1$.

123. Знакопеременные ряды. Переходя к рядам с какими угодно членами, мы рассмотрим прежде всего ряды *знакопеременные*, у которых члены попеременно положительны и отрицательны. Такие ряды удобнее писать не так, как раньше, а в виде:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \ldots \pm u_n \mp u_{n+1} \ldots, \tag{34}$$

причем числа

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots,$$

считаются положительными. [1])

Относительно знакопеременных рядов можно доказать следующее предложение:

Для того чтобы знакопеременный ряд сходился, достаточно, чтобы абсолютные значения его членов убывали и стремились к нулю при возрастании n. Остаток такого ряда по абсолютному значению не превосходит абсолютного значения первого из отброшенных членов.

Рассмотрим сперва суммы четного числа членов ряда

$$s_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2n-1} - u_{2n}.$$

Так как по условию абсолютные значения членов ряда убывают (лучше сказать, не возрастают) при возрастании n, то, вообще:

$$u_k \geqslant u_{k+1} \quad \text{и} \quad u_{2n+1} - u_{2n+2} \geqslant 0,$$

а потому

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) \geqslant s_{2n},$$

т. е. переменная s_{2n} — *не убывающая*. С другой стороны, мы имеем:

$$s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \leqslant u_1,$$

так как все разности в скобках неотрицательны, т. е. переменная s_{2n} остается *ограниченной* при всех значениях n. Отсюда следует, что, при беспредельном возрастании n, s_{2n} стремится к конечному пределу [30], который мы обозначим через s:

$$\lim_{n \to \infty} s_{2n} = s.$$

Далее, мы имеем:

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1} \to s \text{ при } n \to \infty,$$

так как по условию $u_{2n+1} \to 0$.

---

[1]) Здесь мы считаем, что первый член ряда положительный; если он отрицательный, то ряд запишется в виде $-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots$

Мы видим, таким образом, что как сумма четного, так и сумма нечетного числа членов ряда (34) стремится к одному и тому же пределу s, т. е. ряд (34) сходящийся и имеет сумму s.

Остается еще оценить остаток r_n ряда. Мы имеем:

$$r_n = \pm u_{n+1} \mp u_{n+2} \pm u_{n+3} \mp u_{n+4} \pm \ldots,$$

причем одновременно надо брать верхние или нижние знаки. Иначе:

$$r_n = \pm (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \ldots),$$

откуда, рассуждая как и раньше, имеем:

$$|r_n| = (u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \ldots = \\ = u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \ldots \leqslant u_{n+1},$$

что и требовалось доказать.

Из формулы:

$$r_n = \pm [(u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \ldots],$$

в квадратных скобках которой стоят неотрицательные количества, следует, что знак r_n совпадает с тем знаком, который надо брать перед квадратной скобкой, т. е. совпадает со знаком $\pm u_{n+1}$. Итак, *при указанных в теореме условиях знак остатка знакопеременного ряда совпадает со знаком первого из отброшенных членов.*

Пример. Ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

есть знакопеременный ряд, абсолютные значения членов которого беспредельно убывают при $n \to \infty$, а потому он будет сходящимся. Мы увидим в дальнейшем, что его сумма равна $\log 2$. Однако для действительного вычисления $\log 2$ этот ряд не годится, так как для того чтобы остаток его был меньше 0,0001, нужно взять 10 000 его членов:

$$|r_n| < \frac{1}{n+1} \leqslant 0{,}0001; \quad n \geqslant 10\,000.$$

Итак, ряд этот хотя и сходится, *но сходится очень медленно;* для того чтобы иметь с такими рядами дело на практике, нужно предварительно преобразовать их из медленно сходящихся в быстро сходящиеся, или, как говорят, улучшить сходимость.

124. Абсолютно сходящиеся ряды. Из прочих рядов с какими угодно членами мы остановимся лишь на рядах абсолютно сходящихся.

Ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{35}$$

сходится, если сходится ряд, составленный из абсолютных значений членов данного ряда, т. е. *ряд*

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{36}$$

Такие ряды называются абсолютно сходящимися рядами.

Итак, допустим, что ряд (36) сходится, и положим:

$$v_n = \frac{1}{2}(|u_n| + u_n), \quad w_n = \frac{1}{2}(|u_n| - u_n).$$

Оба числа v_n и w_n, наверно, неотрицательны, так как очевидно:

$$v_n = \begin{cases} u_n, & \text{если } u_n \geqslant 0, \\ 0 & \text{»} \quad u_n \leqslant 0, \end{cases} \qquad w_n = \begin{cases} 0, & \text{если } u_n \geqslant 0, \\ |u_n|, & \text{»} \quad u_n \leqslant 0. \end{cases}$$

С другой стороны, как v_n, так и w_n не превосходят $|u_n|$, т. е. общего члена сходящегося ряда (36), а потому, в силу признака 2 сходимости рядов с положительными членами [120], оба ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

будут сходящимися.

Так как мы имеем:

$$u_n = v_n - w_n,$$

то будет сходиться и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - w_n) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} w_n,$$

который получается почленным вычитанием ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ [119].

Сходящиеся ряды с положительными членами представляют частный случай абсолютно сходящихся рядов, признаки сходимости которых получаются непосредственно из признаков сходимости рядов с положительными членами.

Признаки сходимости 1—5, *выведенные в* [120, 121, 122] *для рядов с положительными членами, применяются и к рядам с какими угодно членами, если только условиться заменить везде* u_n *на* $|u_n|$. *При этом условии останутся в силе и признаки расходимости* 3 *и* 4 *и следствие из них* [121].

В частности, в формулировках признаков Коши и Даламбера нужно заметить:

$$\sqrt[n]{u_n} \text{ и } \frac{u_n}{u_{n-1}} \quad \text{на} \quad \sqrt[n]{|u_n|} \text{ и } \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right|.$$

Так, например, если $\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| < q < 1$, т. е. $\frac{|u_n|}{|u_{n-1}|} < q < 1$, то согласно признаку Даламбера [121], ряд с положительными членами

(36) сходится, а следовательно, ряд (35) сходится абсолютно. Если же $\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| \geqslant 1$, т. е. $|u_n| \geqslant |u_{n-1}|$, то, при возрастании n, члены u_n не убывают по абсолютному значению, а потому не могут стремиться к нулю, и ряд (35) расходится. Отсюда, как и в следствии [121], следует, что если $\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| \to r < 1$, то ряд (35) абсолютно сходится; если же $\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| \to r > 1$, то ряд (35) расходится.

Замечание. Заметим еще, что *если члены некоторого ряда* (35) *по абсолютному значению не больше некоторых положительных чисел* $|u_n| \leqslant a_n$ *и ряд* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *из этих чисел сходится, то* ряд (36) и подавно сходится [120], т. е. *ряд* (35) *абсолютно сходится.*

Примеры. 1. Ряд (пример [121])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

абсолютно сходится при всех конечных значениях x как положительных, так и отрицательных, ибо

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|}{n} \to 0$$

при всех конечных значениях x.

2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

абсолютно сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$, так как

$$\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \frac{n-1}{n}|x| \to |x|.$$

3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\alpha$$

абсолютно сходится при $|r| < 1$, ибо для него:

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{|r^n| \, |\sin n\alpha|} \leqslant \sqrt[n]{|r|^n} = |r| < 1.$$

Необходимо заметить, что далеко не всякий сходящийся ряд есть вместе с тем и абсолютно сходящийся, т. е. остается сходящимся, если каждый член ряда заменить его абсолютным значением. Так, например, знакопеременный ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

как мы видели, — сходящийся; если же заменить каждый член его абсолютным значением, получим расходящийся гармонический ряд:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

Абсолютно сходящиеся ряды обладают многими замечательными свойствами, которые изложены мелким шрифтом в § 14. Так, например, только они обладают свойством конечных сумм — независимостью суммы от порядка слагаемых.

125. Общий признак сходимости. В заключение настоящего параграфа упомянем о необходимом и достаточном условии сходимости ряда

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

Сходимость эта по определению равносильна существованию предела у последовательности:

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_n \ldots,$$

где s_n — сумма n первых членов ряда. Но для существования этого предела имеем следующее необходимое и достаточное условие Коши [31]:

Для любого заданного положительного ε существует такое N, что

$$|s_m - s_n| < \varepsilon$$

при всяких m и $n > N$. Положим для определенности, что $m > n$ и пусть $m = n + p$, где p — любое целое положительное число. Заметив, что тогда

$$s_m - s_n = s_{n+p} - s_n = (u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{n+p}) - (u_1+u_2+\ldots+u_n) = u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p},$$

мы можем высказать следующий общий признак сходимости ряда.

Для сходимости бесконечного ряда

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого заданного наперед положительного ε существовало такое число N, что при всяком $n > N$ и при всяком положительном p выполняется неравенство:

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}| < \varepsilon,$$

т. е. *сумма какого угодно числа последовательных членов ряда, начиная с u_{n+1}, остается по абсолютному значению меньше ε, коль скоро $n > N$.*

Необходимо заметить, что при всей теоретической важности этого общего признака сходимости ряда, применение его на практике обычно затруднительно.

§ 13. ФОРМУЛА ТЭЙЛОРА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

126. Формула Тэйлора. Рассмотрим полином n-й степени:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n;$$

придадим x приращение h и вычислим соответствующее значение функции $f(x+h)$. Это значение, очевидно, можно разложить по степеням h, раскрывая различные степени $(x+h)$ по формуле бинома Ньютона и располагая окончательный результат по степеням h. Коэффициенты при различных степенях h будут многочленами, зависящими от x:

$$f(x+h)=A_0(x)+hA_1(x)+h^2A_2(x)+\ldots+ h^kA_k(x)+\ldots+h^nA_n(x), \qquad (1)$$

и нужно только определить многочлены:

$$A_0(x),\ A_1(x),\ \ldots,\ A_n(x).$$

Для этого мы изменим обозначения, написав в тождестве (1) a вместо x и вместо $x+h$ просто x. Тогда окажется

$$h=x-a,$$

и, вместо (1), мы получим:

$$f(x)=A_0(a)+(x-a)A_1(a)+(x-a)^2A_2(a)+\ldots+ (x-a)^kA_k(a)+\ldots+(x-a)^nA_n(a). \qquad (2)$$

Для определения $A_0(a)$ положим в этом тождестве $x=a$, что даст:

$$f(a)=A_0(a).$$

Для определения $A_1(a)$ продифференцируем тождество (2) по x и затем положим $x=a$:

$$f'(x)=1\cdot A_1(a)+2(x-a)A_2(a)+\ldots+k(x-a)^{k-1}A_k(a)+ \ldots+n(x-a)^{n-1}A_n(a),$$

$$f'(a)=1\cdot A_1(a).$$

Дифференцируя еще один раз по x и полагая затем $x=a$, получим $A_2(a)$:

$$f''(x)=2\cdot 1A_2(a)+\ldots+k(k-1)(x-a)^{k-2}A_k(a)+ \ldots+n(n-1)(x-a)^{n-2}A_n(a),$$

$$f''(a)=2\cdot 1A_2(a).$$

Продолжая эти операции, дифференцируя k раз и полагая затем $x=a$, мы получим:

$$f^{(k)}(x)=k(k-1)\dots 2\cdot 1A_k(a)+\dots+$$
$$+n(n-1)\dots(n-k+1)(x-a)^{n-k}A_n(a),$$
$$f^{(k)}(a)=k!\,A_k(a).$$

Итак, мы имеем:

$$A_0(a)=f(a),\quad A_1(a)=\frac{f'(a)}{1!},\quad A_2(a)=\frac{f''(a)}{2!},\dots,$$
$$A_k(a)=\frac{f^{(k)}(a)}{k!},\quad \dots,\quad A_n(a)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

после чего формула (2) примет вид:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+$$
$$+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (3)$$

Эта формула верна только в том случае, когда $f(x)$ есть многочлен степени не выше n, и она дает разложение такого многочлена по степеням разности $(x-a)$. Пусть $f(x)$ — какая угодно функция, допускающая производные до n-го порядка включительно. Обозначим через $R_n(x)$ ошибку, которую мы сделаем, приняв за $f(x)$ правую часть равенства (3), т. е. положим:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x). \qquad (4)$$

Допустим, что функция $f(x)$ имеет и непрерывную производную $(n+1)$-го порядка в некотором промежутке изменения x, содержащем точку $x=a$, и выразим $R_n(x)$ через эту производную. Дифференцируя тождество (4) один, два, ..., n раз, мы получим:

$$\left.\begin{aligned}
f'(x)&=f'(a)+\frac{f''(a)}{1!}(x-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\\
&\qquad+R_n'(x),\\
f''(x)&=f''(a)+\frac{f'''(a)}{1!}(x-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}+\\
&\qquad+R_n''(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
f^{(n)}(x)&=f^{(n)}(a)+R_n^{(n)}(x).
\end{aligned}\right\} \qquad (4_1)$$

Полагая в (4) и последних равенствах $x=a$, находим:

$$R_n(a)=0,\ R_n'(a)=0,\ \dots,\ R_n^{(n)}(a)=0. \qquad (5)$$

Дифференцируя последнее из равенств (4_1) еще один раз, найдем:

$$R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x). \qquad (6)$$

Из соотношений (5) и (6) мы без труда получим выражение для $R_n(x)$, ибо по основной формуле интегрального исчисления:

$$R_n(x)-R_n(a)=\int_a^x R'_n(t)\,dt,$$

откуда, принимая во внимание (5) и интегрируя по частям, выводим последовательно:

$$R_n(x)=\int_a^x R'_n(t)\,dt=-\int_a^x R'_n(t)\,d(x-t)=$$

$$=-R'_n(t)(x-t)\Big|_a^x+\int_a^x R''_n(t)(x-t)dt=-\int_a^x R''_n(t)\,d\frac{(x-t)^2}{2!}=$$

$$=-R''_n(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\Big|_a^x+\int_a^x R'''_n(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\,dt=$$

$$=-\int_a^x R'''_n(t)\,d\frac{(x-t)^3}{3!}=$$

$$=-R'''_n(t)\frac{(x-t)^3}{3!}\Big|_a^x+\int_a^x R_n^{(4)}(t)\frac{(x-t)^3}{3!}\,dt=\ldots=$$

$$=\int_a^x R_n^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Для уяснения сделанных преобразований заметим следующее. Переменная интегрирования обозначена буквой t, так что x под знаком интеграла надо считать постоянным и дифференциал x равным нулю, и потому, например:

$$d\,\frac{(x-t)^3}{3!}=\frac{3(x-t)^2}{3!}\,d(x-t)=-\frac{(x-t)^2}{2!}\,dt$$

и, вообще:

$$d\,\frac{(x-t)^k}{k!}=\frac{k(x-t)^{k-1}}{k!}\,d(x-t)=-\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\,dt.$$

Точно так же выражение:

$$R_n^{(k)}(t)\frac{(x-t)^k}{k!}\Big|_a^x \qquad (k\leqslant n)$$

обращается в нуль, так как при подстановке $t=x$ обращается в нуль множитель $(x-t)^k$, а при подстановке $t=a$ множитель $R_n^{(k)}(a)=0$ в силу (5).

Мы получаем таким путем следующее важное предложение:

Формула Тэйлора. *Всякая функция $f(x)$, имеющая внутри некоторого промежутка, содержащего точку $x=a$ внутри себя, непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно, при всех значениях x внутри этого промежутка может быть разложена по степеням разности $(x-a)$ в виде:*

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1!}+(x-a)^2\frac{f''(a)}{2!}+\ldots+$$
$$+(x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+R_n(x), \qquad (7)$$

где $R_n(x)$, *остаточный член формулы, имеет вид:*

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt. \qquad (8)$$

Весьма часто в приложениях встречается другая форма остаточного члена, которая непосредственно получается из (8) при применении теоремы о среднем [95]. Под знаком интеграла в правой части формулы (8) функция $(x-t)^n$ сохраняет знак, а потому по теореме о среднем мы имеем:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_a^x.$$

Подставляя верхний и нижний пределы, получим:

$$-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_a^x=\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1},$$

так как при $t=x$ написанное выражение обращается в нуль. Подставляя это в предыдущую формулу, будем иметь:

$$R_n(x)=(x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \qquad (9)$$

где ξ есть некоторое среднее значение, лежащее между a и x. Эта форма остаточного члена называется *остаточным членом в форме Лагранжа,* и формула Тэйлора с остаточным членом Лагранжа будет:

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1!}+(x-a)^2\frac{f''(a)}{2!}+\ldots+$$
$$+(x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+(x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \qquad (7_1)$$

(ξ между a и x).

127. Различные виды формулы Тэйлора. При $n=0$ мы получаем из (7_1) выведенную раньше [63] формулу конечных приращений Лагранжа:

$$f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi);$$

формула Тэйлора является, таким образом, непосредственным обобщением формулы конечных приращений.

Переходя к прежним обозначениям и написав x вместо a и $x+h$ вместо x, перепишем формулу Тэйлора (7) в виде:

$$f(x+h)-f(x)=\frac{hf'(x)}{1!}+\frac{h^2f''(x)}{2!}+\ldots+\frac{h^n f^{(n)}(x)}{n!}+R_n, \quad (10)$$

так как при новых обозначениях $(x-a)$ надо заменить на h. Значение ξ, лежащее при прежних обозначениях между a и x, будет лежать между x и $(x+h)$, и его можно обозначить через $(x+\theta h)$, где $0<\theta<1$. В силу (9) остаточный член формулы (10) можно, таким образом, написать в виде:

$$R_n=h^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!} \quad (0<\theta<1). \quad (11)$$

Левая часть формулы (10) есть приращение Δy функции $y=f(x)$, соответствующее приращению или, что то же, дифференциалу h независимой переменной. Вспомнив выражения для дифференциалов высших порядков [55], мы имеем:

$$dy=y'dx=f'(x)\cdot h, \quad d^2y=y''(dx)^2=f''(x)\cdot h^2, \ldots,$$
$$d^ny=y^{(n)}(dx)^n=f^{(n)}(x)\cdot h^n,$$

откуда

$$\Delta y=\frac{dy}{1!}+\frac{d^2y}{2!}+\ldots+\frac{d^ny}{n!}+\frac{d^{n+1}y}{(n+1)!}\bigg|_{x+\theta h}, \quad (12)$$

причем символ:

$$\frac{d^{n+1}y}{(n+1)!}\bigg|_{x+\theta h}$$

обозначает результат подстановки в выражение $\frac{d^{n+1}y}{(n+1)!}$ вместо x суммы $x+\theta h$.

В этом виде формула Тэйлора особенно интересна тогда, когда приращение h независимой переменной есть величина бесконечно малая. Формула (12) дает тогда возможность выделить из приращения функции Δy бесконечно малые слагаемые различных порядков относительно h.

В частном случае, когда исходное значение a независимой переменной есть нуль, формула Тэйлора (7) принимает вид:

$$f(x)=f(0)+x\frac{f'(0)}{1!}+x^2\frac{f''(0)}{2!}+\ldots+x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+R_n(x), \quad (13)$$

где

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int\limits_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt=$$

$$=\frac{x^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}=\frac{x^{n+1}f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} \qquad (14)$$

и ξ, лежащее между 0 и x, можно обозначить: $\xi=\theta x$, где θ — некоторое число, удовлетворяющее неравенству $0<\theta<1$. Формула (13) называется *формулой Маклорена*.

128. Ряды Тэйлора и Маклорена. Если данная функция $f(x)$ имеет производные всех порядков, то мы можем написать формулы Тэйлора и Маклорена при любом значении n. Перепишем формулу (7) в виде:

$$f(x)-\left[f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1!}+(x-a)^2\frac{f''(a)}{2!}+\ldots+\right.$$
$$\left.+(x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right]=f(x)-S_{n+1}=R_n(x),$$

где S_{n+1} есть сумма первых $(n+1)$ членов бесконечного ряда

$$f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1!}+\ldots+(x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+$$
$$+(x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}+\ldots$$

Если при беспредельном возрастании n:

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0, \qquad (15)$$

то, в силу сказанного в [118], написанный ряд сходится, и $f(x)$ оказывается равной сумме S этого ряда. Таким образом получается *разложение функции $f(x)$ в бесконечный степенной ряд Тэйлора*

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1!}+\ldots+(x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\ldots \qquad (16)$$

по степеням разности $(x-a)$.

Таким же образом формула Маклорена даст нам при соблюдении условия (15):

$$f(x)=f(0)+x\frac{f'(0)}{1!}+\ldots+x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+\ldots \qquad (17)$$

Оценка остаточного члена R_n в зависимости от n дает ошибку, которую мы сделаем, взяв вместо суммы всего ряда для $f(x)$ сумму $(n+1)$ первых его членов, и потому имеет весьма важное значение для приближенного вычисления значений функции $f(x)$ при помощи разложения ее в степенной ряд, что представляется наиболее употребительным на практике способом.

Применим предыдущие соображения к разложению и приближенному вычислению простейших функций.

129. Разложение e^x. Прежде всего мы имеем:

$$f(x)=e^x,\ f'(x)=e^x,\ \ldots,\ f^{(k)}(x)=e^x,\ \ldots,$$

а потому

$$f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(k)}(0)=1,$$

и формула Маклорена с остаточным членом (14) дает:

$$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \quad (0<\theta<1).$$

Мы видели (пример [121]), что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

есть абсолютно сходящийся при всех конечных значениях x, а потому при всяком x имеем:

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

так как это выражение есть общий член сходящегося ряда.[1] С другой стороны, множитель $e^{\theta x}$ в выражении остаточного члена, наверно, не превосходит e^x при $x>0$ и единицы при $x<0$, а потому остаточный член стремится к нулю при всех значениях x, и мы получим разложение:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots, \tag{18}$$

которое имеет место при всех значениях x.

В частности, при $x=1$ получаем выражение для e, весьма удобное для вычисления e с любой степенью точности:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

Пользуясь этой формулой, вычислим число e с шестью десятичными знаками. Если мы приближенно положим:

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!},$$

то ошибка будет:

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots=\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots\right]<$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\right]=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!\,n},$$

[1] См. также пример в [34].

причем знак ($<$) поставлен потому, что в знаменателе дробей множители $(n+2)$, $(n+3)$, $(n+4), \ldots$ заменены меньшим числом $(n+1)$, отчего все дроби увеличились.

Можно поэтому указать следующие пределы, между которыми заключается число e:

$$2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}<e<2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!\,n}.$$

Если желаем получить для e приближенное значение, отличающееся от истинного не более, чем на 0,000 001, положим $n=10$; тогда

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{10!},$$

и ошибка не превзойдет $\frac{1}{10!\,10}<3\cdot 10^{-8}$. В этой формуле первые два слагаемых вычисляются точно; остальные восемь слагаемых нужно вычислить с семью знаками, так как при этом ошибка каждого слагаемого не больше 0,5 единицы седьмого знака, т. е. $0{,}5\cdot 10^{-7}$, а вся ошибка не больше:

$$10^{-7}\cdot 0{,}5\cdot 8=4\cdot 10^{-7},$$

т. е. четырех единиц седьмого знака, а потому общая ошибка по абсолютному значению не будет превышать $4{,}3\cdot 10^{-7}$. Мы имеем:

$2=2{,}000\,000$	0 (точно)	
$\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}=0{,}500\,000$	0 „	
$\frac{1}{3!}=\frac{1}{2!3}=0{,}166\,666$	7 (по избытку)	
$\frac{1}{4!}=\frac{1}{3!4}=0{,}041\,666$	7 „ „	
$\frac{1}{5!}=\frac{1}{4!5}=0{,}008\,333$	3 (по недостатку)	
$\frac{1}{6!}=\frac{1}{5!6}=0{,}001\,388$	9 (по избытку)	$e\approx 2{,}718\,2818.$
$\frac{1}{7!}=\frac{1}{6!7}=0{,}000\,198$	4 (по недостатку)	
$\frac{1}{8!}=\frac{1}{7!8}=0{,}000\,024$	8 „ „	
$\frac{1}{9!}=\frac{1}{8!9}=0{,}000\,002$	8 (по избытку)	
$\frac{1}{10!}=\frac{1}{9!10}=0{,}000\,000$	3 „	

Значение e с 12 знаками есть 2,718 281 828 459.

130. Разложение $\sin x$ и $\cos x$. Мы имеем [53]:

$$f(x)=\sin x, \quad f'(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \ldots, \quad f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right),$$

откуда

$$f(0)=0, \quad f'(0)=1, \quad f''(0)=0, \quad f'''(0)=-1, \ldots,$$
$$f^{(2m)}(0)=0, \quad f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m,$$

после чего формула (13) дает:

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+$$
$$+\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\sin\left[\theta x+\frac{(2n+3)\pi}{2}\right].$$

В остаточном члене множитель $\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$, как мы видели выше, стремится к нулю при $n\to\infty$, а абсолютное значение синуса не превышает единицы, и, следовательно, остаточный член стремится к нулю при всех конечных значениях x, т. е. разложение

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \tag{19}$$

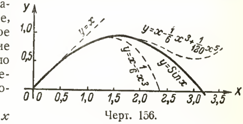
имеет место *при всех значениях* x.

Аналогичным образом мы можем доказать, что разложение

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \tag{20}$$

имеет место *при всех значениях* x.

Ряды (19) и (20) весьма удобны для вычисления значений функций $\sin x$ и $\cos x$ при малых значениях угла x. При всех значениях x, как положительных, так и отрицательных, они знакопеременные, так что если мы взяли такое число членов, что дальнейшие идут убывая, то ошибка по абсолютному значению не превосходит первого из отброшенных членов [123].



Черт. 156.

При больших значениях x ряды (19) и (20) также сходятся, но медленно, и для вычисления неудобны. На черт. 156 показано взаимное расположение *точной кривой* $\sin x$ и первых трех *приближений:*

$$x, \; x-\frac{x^3}{6}, \; x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}.$$

Чем больше членов взято в приближенной формуле, тем в большем промежутке приближенная кривая близка к точной. Заметим, что во всех написанных формулах угол x выражается в дуговой мере, т. е. в радианах [33].

Пример. Вычислить $\sin 10°$ с точностью до 10^{-5}. Прежде всего переводим градусную меру в дуговую:

$$\operatorname{arc} 10° = \frac{2\pi}{360} \cdot 10 = \frac{\pi}{18} = 0{,}17\ldots$$

Остановившись на приближенной формуле:

$$\sin \frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3,$$

мы делаем ошибку, не превосходящую

$$\frac{1}{120} \cdot (0{,}2)^5 < 4 \cdot 10^{-6} \qquad \left(\frac{\pi}{18} < 0{,}2\right).$$

В правой части предыдущей формулы $\sin \frac{\pi}{18}$ надлежит вычислять каждое слагаемое с шестью знаками, так как тогда полная ошибка будет не больше

$$2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-6}.$$

С указанной точностью мы имеем:

$$\frac{\pi}{18} = 0{,}174\,533; \qquad \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 = 0{,}000\,886; \qquad \sin \frac{\pi}{18} = 0{,}173\,647,$$

причем за первые четыре знака можно ручаться.

131. Бином Ньютона. Здесь мы имеем, считая $x > -1$, т. е. $1 + x > 0$:

$$f(x) = (1+x)^m, \quad f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \ldots,$$
$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\ldots(m-k+1)(1+x)^{m-k},$$
$$f(0) = 1, \ f'(0) = m, \ldots, \quad f^{(k)}(0) = m(m-1)\ldots(m-k+1),$$

где m — любое вещественное число, так что формула (13) дает нам:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x), \tag{21}$$

где остаточный член может быть определен по формуле (8) при $a = 0$:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Принимая во внимание, что в данном случае:

$$f^{(n+1)}(t) = m(m-1)\ldots(m-n)(1+t)^{m-n-1},$$

можем написать:

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!} \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{m-n-1}\, dt. \quad (22)$$

Применяя к интегралу теорему о среднем (13) из [95] и обозначая через θx, где $0 < \theta < 1$, значение t, лежащее между 0 и x и входящее в упомянутую теорему о среднем, получим:

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!} (x-\theta x)^n (1+\theta x)^{m-n-1} \int_0^x dt =$$

$$= \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{n!} x^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{m-1} mx. \quad (23)$$

Если $R_n \to 0$, то ряд

$$1 + \frac{m}{1!} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \ldots \quad (24)$$

должен быть сходящимся [118]. Мы имеем:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{m-n+1}{n} x\right| \to |x| \quad \text{при } n \to \infty,$$

а потому ряд сходится (абсолютно) при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$ [124]. Хотя ряд (24) и сходится при $|x| < 1$, однако еще неясно, что при этом его сумма равна $(1+x)^m$, и приходится еще доказывать, что $R_n(x) \to 0$ при $|x| < 1$. Множитель

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{n!} x^n$$

в выражении (23) для $R_n(x)$ будет общим членом *сходящегося* ряда (24), в котором m заменено на $(m-1)$, а потому [118] стремится к нулю при $n \to \infty$.

Множитель $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$ не превосходит единицы при всех значениях n. В самом деле, в рассматриваемом случае $-1 < x < +1$, а потому как при положительных, так и при отрицательных значениях x будет $0 < 1-\theta < 1+\theta x$, откуда:

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1 \quad \text{и} \quad 0 < \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n < 1.$$

Последний множитель $mx(1+\theta x)^{m-1}$ также остается ограниченным, так как число $(1+\theta x)$ лежит между 1 и $1+x$, и $mx(1+\theta x)^{m-1}$ лежит между пределами mx и $mx(1+x)^{m-1}$, не зависящими от n.

Из сказанного ясно, что $R_n(x)$ по формуле (23) представляется в виде произведения трех множителей, из которых один стремится к нулю, а два других остаются ограниченными при беспредельном возрастании n, а потому и

$$R_n(x) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Итак, разложение

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \qquad (25)$$

имеет место *при всех значениях x, удовлетворяющих условию*

$$|x| < 1.$$

Когда показатель m есть число целое и положительное, то ряд (25) заканчивается на члене $n=m$ и превращается в элементарную формулу бинома Ньютона. В общем же случае *разложение* (25) *дает обобщение бинома Ньютона для какого угодно показателя m.*

Полезно отметить особо некоторые частные случаи бинома:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots, \qquad (26)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots, \qquad (27)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \ldots \qquad (28)$$

Заметим, что функция $(1+x)^m$ при всяких $x > -1$ имеет *положительные* значения [19, 44], т. е. сумма ряда (24) при $-1 < x < +1$ положительна. В частности, например, ряд (27) дает в этом промежутке положительное значение $\sqrt{1+x}$.

Примеры. 1. *Извлечение корней.* Формула (25) особенно удобна для извлечения корней с любой степенью точности. Пусть нужно извлечь корень m-й степени из целого числа A. Всегда можно подобрать целое число a так, чтобы m-я степень a была, по возможности, ближе к A, так что, положив $A = a^m + b$, причем $|b| < a^m$, мы имели бы:

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{a^m + b} = a\sqrt[m]{1 + \frac{b}{a^m}}.$$

Так как здесь $\left|\frac{b}{a^m}\right| < 1$, то обозначив отношение $\frac{b}{a^m}$ через x, мы можем вычислить $\sqrt[m]{1+\frac{b}{a^m}}$ по формуле бинома Ньютона, причем ряд будет сходиться тем лучше, чем меньше абсолютное значение рассматриваемого отношения.

Вычислим, например, $\sqrt[5]{1000}$ с точностью до 10^{-5}. Мы имеем:

$$\sqrt[5]{1000}=\sqrt[5]{1024-24}=4\left(1-\frac{3}{128}\right)^{1/5}=$$
$$=4\left[1-\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{128}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}\left(\frac{3}{128}\right)^2-\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{9}{15}\left(\frac{3}{128}\right)^3-\ldots\right].$$

Остановимся на написанных членах и оценим ошибку, подставляя в формулу (23):

$$m=\frac{1}{5};\qquad n=3;\qquad x=-\frac{3}{128}.$$

Множитель $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$, как было указано, заключается между нулем и единицей. Множитель $(1+\theta x)^{m-1}$ будет:

$$\left(1-\theta\frac{3}{128}\right)^{-4/5}<\left(1-\frac{3}{128}\right)^{-4/5}=\left(\frac{125}{128}\right)^{4/5}<\left(\frac{6}{5}\right)^{4/5}=\left(\sqrt[5]{\frac{6}{5}}\right)^4<\left(\frac{4}{3}\right)^4,$$

ибо

$$\sqrt[5]{\frac{6}{5}}<\frac{6}{5}<\frac{4}{3}.$$

Окончательно из формулы (23) получим:

$$4\,|R_n|<\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{14}{5}\left(\frac{4}{128}\right)^4<2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6\cdot 2{,}8\cdot(0{,}03)^4<5\cdot 10^{-7}.$$

Вычисление оставшихся членов нужно вести с шестью знаками, так как тогда полная ошибка не превзойдет:

$$4\cdot 3\cdot 0{,}5\cdot 10^{-6}+5\cdot 10^{-7}=6{,}5\cdot 10^{-6}<10^{-5}.$$

Вычисление можно расположить следующим образом:

$\frac{1}{5}=0{,}2$	$\times\frac{3}{128}=0{,}023\ 4375\times 0{,}2=0{,}004\ 687$
$\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}=0{,}08$	$\times\left(\frac{3}{128}\right)^2=0{,}000\ \ 549\times 0{,}08=0{,}000\ 044$
$\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{9}{15}=0{,}048$	$\times\left(\frac{3}{128}\right)^3=0{,}000\ 013\times 0{,}048=0{,}000\ 001$

0,004 732

$$1-0{,}004\ 732=0{,}995\ 268$$
$$\times 4$$
$$3{,}981\ 072$$

2. *Приближенное вычисление длины эллипса.* В [103] было получено следующее выражение для длины l эллипса с полуосями a и b:

$$l=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin^2 t+\frac{b^2}{a^2}\cos^2 t}\,dt$$

[формула (22)]. Вводя в рассмотрение эксцентриситет ε эллипса:

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \qquad \frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2,$$

получаем:

$$l = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t}\, dt. \tag{29}$$

Интеграл этот точно вычислить нельзя, но его можно вычислить с какой угодно степенью точности, разложив подинтегральную функцию в ряд по степеням ε: [1])

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2 t + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{1 \cdot 2} \varepsilon^4 \cos^4 t - \\ - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varepsilon^6 \cos^6 t + \ldots = \\ = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2 t - \frac{1}{8}\varepsilon^4 \cos^4 t - \frac{1}{16}\varepsilon^6 \cos^6 t + R_3,$$

причем ошибка R_3, если ее оценить по формуле (23) при $n = 3$, удовлетворяет неравенству:

$$|R_3| = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varepsilon^8 \cos^8 t \left(\frac{1 - \theta}{1 - \theta\varepsilon^2 \cos^2 t}\right)^3 (1 - \theta\varepsilon^2 \cos^2 t)^{\frac{1}{2} - 1} < \\ < \frac{5}{32} \frac{\varepsilon^8 \cos^8 t}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \tag{30}$$

так как

$$0 < \left(\frac{1 - \theta}{1 - \theta\varepsilon^2 \cos^2 t}\right)^3 < 1$$

и

$$(1 - \theta\varepsilon^2 \cos^2 t)^{\frac{1}{2} - 1} < (1 - \varepsilon^2 \cos^2 t)^{-\frac{1}{2}}.$$

Подставив это выражение в (29) для l, интегрируя и вспомнив формулы (27) [**100**], находим:

$$l = 4a\left[\int_0^{\pi/2} dt - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt - \frac{1}{8}\varepsilon^4 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t\, dt - \frac{1}{16}\varepsilon^6 \int_0^{\pi/2} \cos^6 t\, dt + \int_0^{\pi/2} R_3\, dt\right] = \\ = 2\pi a\left[1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{64}\varepsilon^4 - \frac{5}{256}\varepsilon^6 + \rho\right], \tag{31}$$

---

[1]) Разложение это, наверно, возможно, так как для эллипса $\varepsilon < 1$, и потому слагаемое — $\varepsilon^2 \cos^2 t$, которое играет здесь роль x в формуле бинома Ньютона, по абсолютному значению меньше единицы.

где в силу формулы (10_1) [95] и неравенства (30):

$$|\rho| = \left| \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} R_3\, dt \right| < \frac{5}{32} \frac{\varepsilon^8}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^8 t\, dt = \frac{175}{2^{12}} \frac{\varepsilon^8}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} < \frac{0{,}05\varepsilon^8}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Формула (31) сама по себе удобна для вычисления длины эллипса, особенно для малых эксцентриситетов. Основываясь на ней, можно указать простое геометрическое построение приближенного выражения для длины эллипса, при котором нужно иметь дело только с окружностями.

Обозначим через l_1 и l_2, соответственно, среднее арифметическое и среднее геометрическое полуосей эллипса:

$$l_1 = \frac{a+b}{2}, \quad l_2 = \sqrt{ab}$$

и сравним длину l эллипса с длинами $2\pi l_1$, $2\pi l_2$ двух окружностей радиусов l_1 и l_2.

Замечая, что

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}, \quad \frac{a+b}{2} = \frac{a}{2}\left[1+\sqrt{1-\varepsilon^2}\right], \quad \sqrt{ab} = a\sqrt[4]{1-\varepsilon^2},$$

и разлагая в ряды по формуле бинома Ньютона, получим без труда следующие выражения:

$$2\pi l_1 = 2\pi a\left[1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{1}{16}\varepsilon^4 - \frac{1}{32}\varepsilon^6 + \rho_1\right], \tag{32}$$

$$2\pi l_2 = 2\pi a\left[1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{32}\varepsilon^4 - \frac{7}{128}\varepsilon^6 + \rho_2\right], \tag{33}$$

причем ошибки ρ_1 и ρ_2, если их оценить по формуле (23), удовлетворяют неравенствам:

$$|\rho_1| < \frac{5}{32} \frac{\varepsilon^8}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad |\rho_2| < \frac{77}{512} \frac{\varepsilon^8}{(1-\varepsilon^2)^{3/4}}.$$

Отсюда ясно, что при малом эксцентриситете, *когда можно пренебречь высшими степенями* ε *по сравнению с* ε^2, *можно принять за длину эллипса длину любой из двух окружностей, радиусы которых равны среднему арифметическому или среднему геометрическому полуосей.* Если желательна бо́льшая точность, составим выражение:

$$\alpha \cdot 2\pi l_1 + \beta \cdot 2\pi l_2, \tag{34}$$

подобрав множители α и β так, чтобы по возможности большее число членов в выражениях (31) и (34) совпадали между собой. Так как первые два члена каждого из выражений (31), (32) и (33) совпадают, то, прежде всего, должно быть

$$\alpha + \beta = 1.$$

Приравнивая, далее, между собой коэффициенты при ε^4 в выражениях (31) и (34), получаем:

$$\frac{\alpha}{16} + \frac{3\beta}{32} = \frac{3}{64} \quad \text{или} \quad 4\alpha + 6\beta = 3.$$

Решая полученные два уравнения относительно α и β, находим:

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}.$$

Подставив это в (34), имеем:

$$\alpha \cdot 2\pi l_1 + \beta \cdot 2\pi l_2 = 2\pi\left(\frac{3}{2} l_1 - \frac{1}{2} l_2\right) =$$
$$= 2\pi a\left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{64}\varepsilon^4 - \frac{5}{256}\varepsilon^6 + \frac{3}{2}\rho_1 - \frac{1}{2}\rho_2\right), \quad (35)$$

т. е. оказывается, что совпадают члены не только с ε^4, но и с ε^6, и расхождение формул (31) и (35) начинается только с членов с ε^8. Приняв во внимание найденные выше оценки для ρ, ρ_1 и ρ_2 и заметив, что

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \text{ и } \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{3/4}} < \frac{1}{1-\varepsilon^2}, \quad \frac{175}{2^{12}} + \frac{5}{32}\cdot\frac{3}{2} + \frac{77}{512}\cdot\frac{1}{2} < 0{,}4,$$

можем окончательно сказать: *с ошибкой, не превосходящей* $\frac{0{,}4\varepsilon^8}{1-\varepsilon^2}$, *за длину эллипса с полуосями* a, b *и эксцентриситетом* ε *можно принять длину окружности радиуса* r, причем:

$$r = \frac{3}{2}\frac{a+b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{ab}.$$

132. Разложение $\log(1+x)$. [1]) Это разложение можно получить из общей теории, но мы применим другой способ, который с успехом употребляется и во многих других случаях.

Выразим $\log(1+x)$ в виде определенного интеграла. Мы имеем, очевидно, при $x > -1$:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \log(1+t)\Big|_0^x = \log(1+x) - \log 1 = \log(1+x),$$

т. е.

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}.$$

Но имеет место тождество:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t},$$

которое непосредственно получается, если делить единицу на $1+t$ и остановиться на остатке $(-1)^n t^n$. Таким образом:

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} =$$
$$= \int_0^x \left[1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\right] dt =$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R_n(x),$$

[1]) Функция $\log x$ не может быть разложена в ряд по степеням x, так как при $x = 0$ она сама и ее производные терпят разрыв непрерывности и обращаются в бесконечность.

где

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n dt}{1+t}. \qquad (36)$$

Ряд

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \ldots,$$

для которого

$$\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \frac{n-1}{n}|x| \to |x| \quad \text{при } n \to \infty,$$

наверно расходящийся при $|x| > 1$ (следствие [121]), а потому нужно рассматривать только случай:

$$|x| < 1, \qquad x = \pm 1.$$

При этом случай $x = -1$ также должен быть отброшен, ибо при $x = -1$ функция $\log(1+x)$ обращается в бесконечность.

Итак, остаются случаи: 1) $|x| < 1$ и 2) $x = 1$. В случае 1), применяя к выражению (36) для $R_n(x)$ теорему о среднем [95] и принимая во внимание, что t^n не меняет знака при изменении t от 0 до x, имеем:

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+\theta x}\int_0^x t^n dt = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)} \quad (0 < \theta < 1), \qquad (37)$$

откуда, в силу условия $|x| < 1$, следует:

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1+\theta x}.$$

Множитель $\frac{1}{|1+\theta x|}$ в правой части предыдущего неравенства остается ограниченным при всех значениях n, так как заключается между пределами:

$$1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{1+x},$$

не зависящими от n, а потому при рассматриваемых значениях x

$$R_n(x) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тот же результат мы получим и в случае 2), когда $x = 1$. Та же формула (37) при $x = 1$ показывает:

$$|R_n(1)| = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1+\theta} < \frac{1}{n+1},$$

т. е. опять

$$R_n(1) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Итак, разложение:

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\ldots \tag{38}$$

имеет место *при всех значениях x, удовлетворяющих неравенствам:*

$$-1<x\leqslant+1. \tag{39}$$

В частности, при $x=1$ имеем равенство:

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots,$$

о котором уже было упомянуто выше [**123**]. Формула (38) непосредственно для вычисления логарифмов не годится, так как в ней предполагается, что x удовлетворяет неравенствам (39) и, кроме того, ряд в правой части ее сходится недостаточно быстро. Ее можно преобразовать в более удобный для вычислений вид. Для этого подставим в равенство:

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$$

$(-x)$ вместо x, что дает:

$$\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots \quad (|x|<1),$$

и вычтем почленно. Мы получим:

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right) \quad (|x|<1).$$

Положив здесь:

$$\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{z}{a}=\frac{a+z}{a}, \quad x=\frac{z}{2a+z}, \tag{40}$$

мы имеем:

$$\log\frac{a+z}{a}=2\left[\frac{z}{2a+z}+\frac{1}{3}\cdot\frac{z^3}{(2a+z)^3}+\frac{1}{5}\,\frac{z^5}{(2a+z)^5}+\ldots\right],$$

или

$$\log(a+z)=\log a+2\left[\frac{z}{2a+z}+\frac{1}{3}\,\frac{z^3}{(2a+z)^3}+\ldots\right]. \tag{41}$$

Эта формула годится уже при всех положительных значениях a и z, так как при этом $x=\frac{z}{2a+z}$ заключается между нулем и единицей. Она тем более удобна для вычисления, чем меньше дробь $\frac{z}{2a+z}$, или, что то же, чем меньше z по сравнению с a.

Формула (41) весьма полезна для вычисления логарифмов. Хотя фактически таблица логарифмов была вычислена не с помощью рядов, которые во время Непера и Бригга были еще неизвестны, все же формула (41) может с успехом применяться для проверки и для быстрого вычисления таблицы логарифмов. Положим в (41) $z=1$ и возьмем последовательно:

$$a = 15, \quad 24, \quad 80,$$

мы получим:

$$\log 16 - \log 15 = 2\left[\frac{1}{31} + \frac{1}{3 \cdot 31^3} + \ldots\right] = 2P,$$

$$\log 25 - \log 24 = 2\left[\frac{1}{49} + \frac{1}{3 \cdot 49^3} + \ldots\right] = 2Q,$$

$$\log 81 - \log 80 = 2\left[\frac{1}{161} + \frac{1}{3 \cdot 161^3} + \ldots\right] = 2R,$$

где ряды, обозначенные через P, Q, R, сходятся весьма быстро. Эти равенства дают нам уравнения:

$$\begin{aligned} 4\log 2 - \log 3 - \log 5 &= 2P, \\ -3\log 2 - \log 3 + 2\log 5 &= 2Q, \\ -4\log 2 + 4\log 3 - \log 5 &= 2R \end{aligned}$$

для определения чисел:

$$\log 2, \quad \log 3, \quad \log 5,$$

решая которые, найдем без труда:

$$\begin{aligned} \log 2 &= 14P + 10Q + 6R, \\ \log 3 &= 22P + 16Q + 10R, \\ \log 5 &= 32P + 24Q + 14R. \end{aligned}$$

Полученные таким путем логарифмы будут натуральными; с их помощью мы находим модуль M десятичной системы логарифмов:

$$M = \frac{1}{\log 10} = 0{,}434\,294\,4819\ \ldots,$$

зная который, можем от натуральных логарифмов переходить к десятичным по формуле

$$\log_{10} x = M \log x.$$

Аналогичным путем, пользуясь разложениями на множители:

$$\begin{aligned} a &= 2\,400 = 100 \cdot 2^3 \cdot 3, & a+z &= 2\,401 = 7^4, \\ a &= 9\,800 = 100 \cdot 2 \cdot 7^2, & a+z &= 9\,801 = 3^4 \cdot 11^2, \\ a &= 123\,200 = 100 \cdot 2^4 \cdot 7 \cdot 11, & a+z &= 123\,201 = 3^6 \cdot 13^2, \\ a &= 2\,600 = 100 \cdot 2 \cdot 13, & a+z &= 2\,601 = 3^2 \cdot 17^2, \\ a &= 28\,899 = 3^2 \cdot 13^2 \cdot 19, & a+z &= 28\,900 = 100 \cdot 17^2, \end{aligned}$$

мы вычислим:

$$\log 7, \quad \log 11, \quad \log 13, \ \ldots$$

Определив логарифмы простых чисел, мы уже без помощи рядов, а только одними сложениями и умножениями на целые множители определим и логарифмы составных чисел, которые, как известно, всегда можно разложить на простые множители.

133. Разложение $\operatorname{arc\,tg} x$. Здесь мы будем поступать так же, как и при разложении $\log(1+x)$. Мы имеем:

$$d \operatorname{arc\,tg} t = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Получаем, интегрируя:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t \Big|_0^x = \operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} 0 = \operatorname{arc\,tg} x,$$

где $\operatorname{arc\,tg} x$, как и в примере из [98], имеет главное значение. Мы имеем, следовательно:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left[1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} + \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\right] dt =$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}\,dt}{1+t^2}. \qquad (42)$$

Ряд

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots,$$

для которого отношение

$$\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \frac{2n-3}{2n-1} x^2 \to x^2, \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

наверно, расходится при $x^2 > 1$; нам поэтому достаточно ограничиться случаем $x^2 \leqslant 1$, т. е.

$$-1 \leqslant x \leqslant +1. \qquad (43)$$

Считая сначала $x > 0$, из формулы (42), в силу VII [95], получим:

$$|R_n(x)| = \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt < \int_0^x t^{2n}\,dt = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2n+1} \to 0 \ (n \to \infty),$$

так как, очевидно,

$$\frac{t^{2n}}{1+t^2} < t^{2n}.$$

Если $x < 0$, то, вводя вместо t новую переменную, $t = -\tau$, получим:

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^{-x} \frac{\tau^{2n}}{1+\tau^2}\,d\tau.$$

Здесь верхний предел $(-x)$ уже положителен, а потому опять имеет место указанная выше оценка для $|R_n(x)|$, т. е. разложение:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \tag{44}$$

имеет место *при всех значениях x, не превосходящих единицу по абсолютному значению.*

В частности, при $x = 1$ получаем:

$$\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Ряд этот, ввиду весьма медленной сходимости, непригоден для вычисления числа π. Ряд (44) сходится тем быстрее, чем меньше x. Положим, например:

$$x = \frac{1}{5} \quad \text{и} \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}.$$

Мы имеем:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12}, \qquad \operatorname{tg} 4\varphi = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

Так как $\operatorname{tg} 4\varphi$ мало отличается от единицы, то угол 4φ мало отличается от $\frac{\pi}{4}$. Введем эту малую разность.

$$\psi = 4\varphi - \frac{\pi}{4}, \qquad \frac{\pi}{4} = 4\varphi - \psi.$$

Отсюда выводим:

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\left(4\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4\varphi - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} 4\varphi \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239},$$

что дает:

$$\frac{\pi}{4} = 4\varphi - \psi = 4 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239} =$$
$$= 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7} + \ldots\right] - \left[\frac{1}{239} - \ldots\right].$$

Оба ряда в скобках — знакопеременные [123], а потому, ограничившись в каждом из них лишь написанными членами, мы сделаем ошибку, не превосходящую

$$\frac{4}{9\cdot 5^9} + \frac{1}{3\cdot 239^3} < 0{,}5 \cdot 10^{-6}.$$

Желая получить π с точностью до 10^{-5}, мы будем вычислять отдельные члены с семью знаками, так как тогда ошибка при определении $\frac{\pi}{4}$ не превзойдет:

$$4\cdot 4\cdot 0{,}5\cdot 10^{-7} + 0{,}5\cdot 10^{-7} + 0{,}5\cdot 10^{-6} < 2\cdot 10^{-6},$$

а ошибка при определении π не превзойдет $8 \cdot 10^{-6}$.

Вычисление будем производить по следующей схеме:

$\frac{1}{5}=0{,}200\,000\,0$	$\frac{1}{3\cdot 5^3}=0{,}002\,666\,7$
$\frac{1}{5\cdot 5^5}=0{,}000\,064\,0$	$\frac{1}{7\cdot 5^7}=0{,}000\,001\,8$
$+0{,}200\,064\,0$	$-0{,}002\,668\,5$

$$0{,}197\,395\,5 \times 4 = 0{,}789\,582\,0$$

$$-\frac{1}{239} = -0{,}004\,184\,1$$

$$0{,}785\,397\,9 \times 4$$

$$\pi \approx \mathbf{3{,}141\,591\,6}$$

Значение числа π с восьмью знаками есть 3,141 591 65.

Можно получить при $|x| \leqslant 1$ разложение:

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\ \ 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad (45)$$

134. Приближенные формулы. Ряд Маклорена, в случае его сходимости, дает возможность приближенно вычислять функцию $f(x)$, заменяя ее конечным числом членов разложения:

$$f(0) + \frac{xf'(0)}{1!} + \frac{x^2 f''(0)}{2!} + \ldots$$

Чем меньше x, тем меньше членов можно брать в этом разложении для вычисления $f(x)$ с желаемой точностью. Если x весьма мало, то достаточно ограничиться только первыми двумя членами, отбросив все остальные. Таким образом получается *весьма простая приближенная формула для* $f(x)$, которая при малых x вполне может заменить часто весьма сложное точное выражение для $f(x)$.

Приведем такие приближенные формулы для наиболее важных функций:

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n}, \qquad \sin x \approx x,$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{n}, \qquad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2},$$

$$(1+x)^n \approx 1 + nx, \qquad \operatorname{tg} x \approx x,$$

$$a^x \approx 1 + x\log a, \qquad \log(1+x) \approx x.$$

Пользуясь этими приближенными формулами при x, близких к нулю (положительных или отрицательных), можно значительно упрощать сложные выражения.

Примеры.

1. $$\left(\frac{1+\frac{m}{n^2}x}{1-\frac{n-m}{n^2}x}\right)^n=\frac{\left(1+\frac{m}{n^2}x\right)^n}{\left(1-\frac{n-m}{n^2}x\right)^n}\approx\left(1+\frac{m}{n}x\right)\left(1+\frac{n-m}{n}x\right)\approx$$
$$\approx 1+\frac{m}{n}x+\frac{n-m}{n}x=1+x.$$

2. $$\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1}{2}\log(1-x)-\frac{1}{2}\log(1+x)\approx-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x=-x.$$

3. Определить увеличение объема тела при нагревании (объемное расширение), когда известен коэффициент линейного расширения α. Если один из линейных размеров тела при $0°$ есть l_0, то при нагревании до $t°$ он будет

$$l=l_0(1+\alpha t).$$

α, коэффициент расширения, для большинства тел весьма малая величина ($<10^{-5}$). Так как объемы относятся, как кубы линейных размеров, можем писать:

$$\frac{v}{v_0}=\frac{(1+\alpha t)^3}{1};\quad v=v_0(1+\alpha t)^3\approx v_0(1+3\alpha t),$$

т. е. число 3α дает нам *коэффициент объемного расширения*. Для плотности ρ, которая обратно пропорциональна объему, найдем аналогичную зависимость:

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{1}{(1+\alpha t)^3},\quad \rho=\rho_0(1+\alpha t)^{-3}\approx\rho_0(1-3\alpha t).$$

Понятно, что все эти приближенные формулы годятся только при достаточно малых x, в противном же случае они оказываются уже неточными, и необходимо привлекать к рассмотрению дальнейшие члены разложения.

135. Максимумы, минимумы и точки перегиба. Формула Тэйлора позволяет сделать существенное дополнение к правилу нахождения максимума и минимума функций, изложенному в [58]. В дальнейшем мы считаем, что $f(x)$ имеет непрерывные производные до порядка n в точке $x=x_0$ и ее окрестности.

Если при $x=x_0$ обращаются в нуль $(n-1)$ первых производных функции $f(x)$:

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,$$

причем n-я производная $f^{(n)}(x_0)$ отлична от нуля, значение x_0 соответствует вершине кривой, если n, т. е. *порядок первой не обращающейся в нуль производной, есть число четное, и притом:*

$$\text{максимум, если } f^{(n)}(x_0)<0,$$
$$\text{минимум, }\ \text{"}\ \ f^{(n)}(x_0)>0;$$

если же n есть число нечетное, то значение x_0 соответствует не вершине, а точке перегиба.

Для доказательства нужно рассмотреть разности:

$$f(x_0+h)-f(x_0)\quad\text{и}\quad f(x_0-h)-f(x_0),$$

где h — достаточно малое положительное число. По самому определению максимума и минимума [58] в точке x_0 будет максимум, если обе эти разности меньше нуля, минимум, если обе они больше нуля. Если же эти разности при сколь угодно малых положительных h будут разных знаков, то при x_0 не будет ни максимума, ни минимума. Разности же эти могут быть вычислены по формуле Тэйлора, если подставить туда x_0 вместо a и $\pm h$ вместо h:[1])

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h),$$

$$f(x_0-h)=f(x_0)-\frac{h}{1!}f'(x_0)+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)+\frac{(-1)^n h^n}{n!}f^{(n)}(x_0-\theta_1 h)$$

$$(0<\theta<1 \quad \text{и} \quad 0<\theta_1<1).$$

По условию:

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0, \quad f^{(n)}(x_0)\neq 0;$$

значит:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h),$$

$$f(x_0-h)-f(x_0)=\frac{(-1)^n h^n}{n!}f^{(n)}(x_0-\theta_1 h).$$

При достаточно малом положительном h множители:

$$f^{(n)}(x_0+\theta h) \quad \text{и} \quad f^{(n)}(x_0-\theta_1 h),$$

в силу предполагаемой непрерывности $f^{(n)}(x)$, имеют одинаковый знак, а именно знак числа $f^{(n)}(x_0)$, отличного от нуля.

Мы видели, что точка x_0 может быть вершиной тогда и только тогда, когда обе разности:

$$f(x_0\pm h)-f(x_0)$$

одинакового знака, и в силу сказанного сейчас это может случиться только, если n число четное, ибо только тогда выражения:

$$f(x_0\pm h)-f(x_0)$$

будут иметь одинаковые знаки; в противном же случае, когда n нечетное, множители h^n и $(-1)^n h^n$ будут разных знаков, и исследуемые разности также будут разных знаков.

---

[1]) Остаточный член мы берем в форме Лагранжа; число θ, лежащее между нулем и единицей, при $(+h)$ и $(-h)$ не одно и то же, почему мы написали θ_1 во второй формуле.

Допустим теперь, что n — четное; тогда общий знак разностей

$$f(x_0 \pm h) - f(x_0)$$

совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$. Если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то

$$f(x_0 \pm h) - f(x_0) < 0,$$

и мы имеем максимум; если же $f^{(n)}(x_0) > 0$, то

$$f(x_0 \pm h) - f(x_0) > 0,$$

и получаем минимум.

Если же n — число нечетное, то, во всяком случае, $n \geqslant 3$, для второй производной $f''(x)$ мы получаем из формулы Тэйлора выражение:

$$f''(x_0 + h) = \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n)}(x_0 + \theta_2 h);$$

$$f''(x_0 - h) = \frac{(-1)^{n-2} h^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n)}(x_0 - \theta_3 h),$$

откуда, рассуждая таким же образом, как и раньше, убеждаемся, что ввиду нечетности $(n-2)$ функция $f''(x)$, обращаясь в нуль при $x = x_0$, меняет знак, т. е. значение x_0 соответствует точке перегиба [71], что и требовалось доказать.

136. Раскрытие неопределенностей. Пусть имеем отношение функций

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

которые при $x = a$ обращаются в нуль. Для раскрытия неопределенного выражения:

$$\left.\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right|_{x=a}$$

при $\varphi(a) = \psi(a) = 0$ разлагаем числитель и знаменатель по формуле Тэйлора:

$$\varphi(x) = (x-a)\varphi'(a) + \frac{(x-a)^2 \varphi''(a)}{2!} + \ldots + \frac{(x-a)^n \varphi^{(n)}(a)}{n!} + \frac{(x-a)^{n+1}\varphi^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!};$$

$$\psi(x) = (x-a)\psi'(a) + \frac{(x-a)^2 \psi''(a)}{2!} + \ldots + \frac{(x-a)^n \psi^{(n)}(a)}{n!} + \frac{(x-a)^{n+1}\psi^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}$$

и, по сокращении рассматриваемого отношения на некоторую степень $(x-a)$, полагаем $x = a$.

Примеры.

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{e^{3x}-1-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{4x^2}{2}+\frac{16x^4}{24}+\ldots\right)}{\left(1+3x+\frac{9x^2}{2}+\frac{27}{6}x^3+\ldots\right)-1-3x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-\frac{16}{24}x^2+\ldots}{\frac{9}{2}+\frac{27}{6}x+\ldots}=\frac{4}{9}.$$

Тот же прием приносит пользу и при раскрытии неопределенностей других видов. Рассмотрим один пример:

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}-x)$.

Здесь мы имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Мы имеем:

$$\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}-x=x\left[\sqrt[3]{1-\frac{5x^2-1}{x^3}}-1\right]=$$
$$=x\left\{\left[1-\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\right]^{1/3}-1\right\}.$$

При достаточно больших, по абсолютному значению, x разность $\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)$ близка к нулю, и мы можем применить формулу бинома Ньютона (25) при $m=\frac{1}{3}$, заменяя x на $-\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)$:

$$\left[1-\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\right]^{1/3}=1-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)^2+\ldots$$

Подставляя это в фигурную скобку и сокращая единицы, получим:

$$\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}-x=x\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)^2+\ldots\right]=$$
$$=\left(-\frac{5}{3}+\frac{1}{3x^2}\right)+\ldots,$$

где все невыписанные члены содержат только отрицательные степени x, т. е в пределе при $x\to\infty$ обращаются в нуль, и, следовательно:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}-x)=-\frac{5}{3}.$$

Возможность предельных переходов в бесконечных рядах, которые мы применяем в настоящем номере, легко может быть оправдана, на чем мы не останавливаемся.

§ 14. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ РЯДОВ

137. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Понятие об абсолютно сходящемся ряде было дано в [124]. Теперь мы установим важнейшие его свойства.

Сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка слагаемых.

Докажем это предложение сперва для рядов с не отрицательными членами, которые, как мы знаем [120], могут быть только или сходящимися (а потому и абсолютно сходящимися), или собственно расходящимися.

Итак, пусть дан сходящийся ряд с положительными (не отрицательными) членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

Обозначим через s_n сумму его n первых членов, через s — его сумму. Мы имеем, очевидно:

$$s_n \leqslant s.$$

Переставив члены ряда (1) каким угодно образом, мы получим другое распределение членов, которому будет соответствовать ряд

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{2}$$

состоящий из тех же членов, что и (1), но в другом порядке, так что каждый член из ряда (1) имеет определенный номер в ряде (2), и наоборот. Обозначим через σ_n сумму n первых членов ряда (2). При любом значении n можно найти настолько большое число m, чтобы все члены, входящие в сумму σ_n, вошли в s_m, а потому

$$\sigma_n \leqslant s_m \leqslant s.$$

Таким образом, показано существование постоянного числа s, не зависящего от n, такого, что при всех значениях n имеем:

$$\sigma_n \leqslant s,$$

откуда [120] вытекает сходимость ряда (2). Обозначим через σ его сумму. Очевидно, что

$$\sigma = \lim_{n \to \infty} \sigma_n \leqslant s.$$

Переставив в предыдущих рассуждениях ряды (1) и (2), мы таким же путем покажем, что

$$s \leqslant \sigma,$$

и из неравенств $\sigma \leqslant s$, $s \leqslant \sigma$ вытекает

$$s = \sigma.$$

Обратимся теперь к рядам с какими угодно членами. Так как по условию ряд (1) абсолютно сходящийся, то ряд с положительными членами

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \tag{3}$$

сходится и по доказанному сумма его s' не зависит от порядка слагаемых. С другой стороны, оба ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(|u_n| + u_n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(|u_n| - u_n)$$

(ср. [124]) также имеют положительные члены и также сходятся, так как

общий член каждого из них не превосходит $|u_n|$, т. е. общего члена сходящегося ряда (3).

В силу доказанного каждый из них не зависит от порядка членов; не будет зависеть от порядка членов и разность их, которая совпадает с суммой ряда (1), что и требовалось доказать.

Следствие. *В абсолютно сходящемся ряде можно каким угодно образом группировать слагаемые и складывать их затем уже по группам,* ибо такая группировка приводит к перемене порядка слагаемых, отчего сумма ряда не изменится.

Замечание. Если из абсолютно сходящегося ряда выделить любую последовательность его членов, то полученный таким путем ряд также будет абсолютно сходящимся, так как такому выделению соответствует выделение последовательности членов в ряде (3) с положительными членами, что, очевидно, не нарушает сходимости этого ряда и даже уменьшает его сумму. В частности, будут сходящимися ряды, составленные в отдельности из положительных и отрицательных членов сходящегося ряда. Обозначим через s' сумму ряда, составленного из положительных членов, и через $(-s'')$ — сумму ряда, составленного из отрицательных членов. При беспредельном возрастании n сумма s_n первых n членов всего ряда будет содержать сколь угодно много членов из обоих упомянутых рядов, и в пределе, очевидно, получим:

$$s = \lim s_n = s' - s''.$$

Нетрудно показать, что когда ряд сходится не абсолютно, то ряды, составленные из его положительных и отрицательных членов, являются собственно расходящимися. Так, например, для неабсолютно сходящегося ряда [124]:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

ряды

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \ldots$$

расходятся. Сумма n первых членов первого ряда стремится к $(+\infty)$, а второго ряда — к $(-\infty)$ при беспредельном возрастании n. Пользуясь указанным выше обстоятельством, Риман показал, что, меняя надлежащим образом порядок членов неабсолютно сходящегося ряда, можно сделать его сумму равной какому угодно числу. Таким образом, оказывается, что понятие об абсолютно сходящемся ряде тождественно с понятием о ряде, сумма которого не зависит от порядка слагаемых.

Заметим еще, что если мы в каком-нибудь сходящемся (не обязательно абсолютно сходящемся) ряде переставим местами конечное число слагаемых, то суммы первых n членов s_n останутся при всех достаточно больших n теми же, т. е. сходимость ряда не нарушится, и сумма ряда останется прежней. Предыдущее же рассуждение и результаты относятся и к тому случаю, когда переставляют бесконечное число слагаемых.

138. Умножение абсолютно сходящихся рядов. *При перемножении двух абсолютно сходящихся бесконечных рядов можно применять правило умножения конечных сумм: произведение равно сумме ряда, который получим, если каждый член одного ряда умножим на каждый член другого и полученные произведения сложим. Порядок слагаемых здесь безразличен, так как построенный таким путем ряд будет также абсолютно сходящимся.*

Данные абсолютно сходящиеся ряды пусть будут:

$$\left.\begin{aligned} s &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \\ \sigma &= v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Рассмотрим сперва частный случай, когда оба они с положительными членами, и притом когда само умножение совершается следующим порядком:

$$u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1 + \ldots + \\ + u_1v_n + u_2v_{n-1} + \ldots + u_nv_1 + \ldots \qquad (5)$$

Покажем, прежде всего, что ряд (5), все члены которого также положительны, сходится, а затем уже, что его сумма S равна $s\sigma$.

Обозначим через S_n сумму n первых членов ряда (5). Можно всегда выбрать настолько большое число m, чтобы все члены, входящие в состав S_n, вошли и в произведение сумм:

$$s_m = u_1 + u_2 + \ldots + u_m, \qquad \sigma_m = v_1 + v_2 + \ldots + v_m,$$

т. е. чтобы оказалось $S_n \leqslant s_m\sigma_m$, т. е.

$$S_n \leqslant s\sigma, \qquad (6)$$

так как $s_m \leqslant s$, $\sigma_m \leqslant \sigma$, откуда и следует сходимость ряда (5) [120].

Обозначив сумму ряда (5) через S, из неравенства (6), очевидно, имеем:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \leqslant s\sigma.$$

Рассмотрим теперь произведение $s_n\sigma_n$. При данном n, очевидно, можно найти настолько большое m, чтобы все члены, входящие в состав произведения сумм s_n и σ_n, вошли в сумму S_m; мы получим тогда

$$s_n\sigma_n \leqslant S_m \leqslant S,$$

а потому и в пределе, при $n \to \infty$,

$$s_n\sigma_n \to s\sigma \leqslant S. \qquad (7)$$

Неравенство это в соединении с (6) дает $S = s\sigma$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь ряды (4) — абсолютно сходящиеся, но с какими угодно членами. Следовательно, сходятся ряды с положительными членами:

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \quad \text{и} \quad |v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n| + \ldots,$$

а потому, в силу только что доказанного, сходится и ряд

$$|u_1||v_1| + |u_2||v_1| + |u_1||v_2| + |u_2||v_2| + \ldots + \\ + |u_1||v_n| + \ldots + |u_n||v_1| + \ldots$$

Отсюда видно, что составленный по предыдущему правилу ряд (5) будет в этом случае абсолютно сходящимся. Обозначим теперь через

$$a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots; \quad a''_1, a''_2, \ldots, a''_n, \ldots \\ b'_1, b'_2, \ldots, b'_n, \ldots; \quad b''_1, b''_2, \ldots, b''_n, \ldots$$

соответственно положительные члены рядов (4) и абсолютные значения отрицательных членов. Мы знаем (замечание [137]), что ряды, составленные из этих членов, сходятся; положим:

$$s' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n, \quad \sigma' = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n, \quad s'' = \sum_{n=1}^{\infty} a''_n, \quad \sigma'' = \sum_{n=1}^{\infty} b''_n. \qquad (8)$$

Как известно [137], мы имеем:

$$s = s' - s'', \quad \sigma = \sigma' - \sigma''.$$

Как показано, ряды (8) с положительными членами можно почленно перемножать между собой; сумма произведений рядов

$$s'\sigma', \quad s''\sigma'', \quad -s'\sigma'', \quad -s''\sigma'$$

содержит как раз те и только те члены, которые входят в ряд (5), а потому имеем:

$$S = s'\sigma' + s''\sigma'' - s'\sigma'' - s''\sigma' = (s' - s'')(\sigma' - \sigma'') = s\sigma,$$

что и требовалось доказать.

Пример. Ряд

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1-q}$$

сходится абсолютно при $|q| < 1$, а потому

$$\frac{1}{(1-q)^2} = (1 + q + \ldots + q^{n-1} + \ldots)(1 + q + \ldots + q^{n-1} + \ldots) = \\ = 1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} + \ldots$$

139. Признак Куммера. Признаки Коши и Даламбера сходимости и расходимости рядов [121], при всей их практической важности, все же являются весьма частными и не применимы во многих даже сравнительно простых случаях. Проводимый ниже признак обладает гораздо большей общностью.

Признак Куммера. *Ряд с положительными членами:*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{9}$$

наверно сходится, если можно найти такую последовательность положительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, чтобы, начиная с некоторого значения n, было всегда:

$$\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} \geqslant \alpha > 0, \tag{10}$$

где α — некоторое положительное число, не зависящее от n; ряд (9) *наверно расходится, если при тех же значениях n окажется:*

$$\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} \leqslant 0, \tag{11}$$

и, кроме того, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}$ — расходящийся.

Не ограничивая общности, мы можем считать, что условия теоремы выполняются, уже начиная с $n = 1$. Пусть сперва выполнено условие (10). Мы выводим из него, положив $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 \geqslant \alpha u_2, \quad \alpha_2 u_2 - \alpha_3 u_3 \geqslant \alpha u_3, \ \ldots, \quad \alpha_{n-1} u_{n-1} - \alpha_n u_n \geqslant \alpha u_n,$$

откуда, складывая почленно и приводя подобные члены, находим:

$$\alpha(u_2 + \ldots + u_n) \leqslant \alpha_1 u_1 - \alpha_n u_n < \alpha_1 u_1.$$

Мы видим отсюда, что ряд (9) с положительными членами, сумма n первых членов которого без u_1 остается меньше постоянного числа $\frac{\alpha_1 u_1}{\alpha}$, не зависящего от n, — сходится [120].

Пусть теперь выполнено условие (11). Оно дает нам:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{\frac{1}{\alpha_{n+1}}}{\frac{1}{\alpha_n}},$$

т. е. отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ не меньше соответствующего отношения членов расходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}. \tag{12}$$

Расходимость ряда (9) будет следовать тогда из следующей леммы о рядах с положительными членами:

Дополнение к признаку Даламбера. *Если, начиная с некоторого значения n, отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ не превосходит соответствующего отношения $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ членов сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится. Если же отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ остается не меньшим соответствующего отношения членов расходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ — расходящийся.*

Действительно, пусть сперва имеем:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

причем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{13}$$

сходится. Мы имеем последовательно:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant \frac{v_n}{v_{n-1}}, \quad \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \leqslant \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}}, \; \ldots, \; \frac{u_2}{u_1} \leqslant \frac{v_2}{v_1},$$

откуда, перемножая, находим:

$$\frac{u_n}{u_1} \leqslant \frac{v_n}{v_1}, \text{ или } u_n \leqslant \frac{u_1}{v_1} v_n.$$

Из последнего неравенства и замечания в [120] $\left(\text{при } k = \frac{u_1}{v_1}\right)$ следует сходимость ряда $\sum u_n$. Аналогичным образом можно доказать и расходимость его, в случае, если $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ и ряд $\sum v_n$ расходится

140. Признак Гаусса. Весьма важные применения имеет *признак Гаусса*[1]. *Если в ряде с положительными членами* (9):

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

---

[1]) В сущности, обобщение признака, действительно установленного Гауссом.

отношение $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ *можно представить в виде:*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\omega_n}{n^p}, \qquad \text{где } p > 1 \text{ и } |\omega_n| < A, \tag{14}$$

причем A не зависит от n, т. е. *величина ω_n остается ограниченной, то ряд* (9) *сходится, если $\mu > 1$, и расходится, если $\mu \leqslant 1$.*

Заметим, что во всех случаях, исчерпываемых этим признаком, признак Даламбера неприменим [121]. Сама же формула (14) получается при разложении отношения $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ по степеням $\frac{1}{n}$, т. е. при выделении членов различных порядков малости относительно $\frac{1}{n}$, конечно, если это возможно.

Переходя к доказательству, мы исследуем отдельно случаи: 1) $\mu \neq 1$ и 2) $\mu = 1$. В случае 1) мы положим в признаке Куммера $\alpha_n = n$, причем заметим, что $\alpha_n > 0$ и ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится [119]. Мы имеем, очевидно, в данном случае:

$$\lim_{n \to \infty} \left[\alpha_n \cdot \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1}\right] = \lim_{n \to \infty} \left[n\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\omega_n}{n^p}\right) - n - 1\right] = \mu - 1.$$

Если $\mu > 1$, то, начиная с некоторого значения n, будем иметь:

$$\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} > \alpha > 0,$$

где α — любое положительное число, меньшее $\mu - 1$, и ряд (9) будет сходящимся. Если же $\mu < 1$, то, начиная с некоторого значения n, мы будем иметь:

$$\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} < 0,$$

т. е. ряд (9) будет расходящимся [139].

В случае 2) мы имеем:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\omega_n}{n^p}.$$

Положим в признаке Куммера $\alpha_n = n \log n$ и составим ряд

$$\sum \frac{1}{\alpha_n} = \sum \frac{1}{n \log n}, \tag{15}$$

где суммирование можно начинать с любого целого положительного n, так как первые слагаемые не влияют на сходимость [118]. Докажем расходимость написанного ряда, пользуясь интегральным признаком Коши [122]. Нам надо доказать расходимость интеграла:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x \log x} \qquad (a > 1).$$

Но мы имеем

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x \log x} = \int_a^\infty \frac{d(\log x)}{\log x} = \int_{\log a}^\infty \frac{dt}{t} = \log(\log x)\Big|_a^\infty,$$

и функция $\log(\log x)$ беспредельно возрастает при возрастании x, т. е. написанный выше интеграл действительно расходится, а потому и ряд (15) расходится. Составим теперь разность $\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1}$, пользуясь (14):

$$\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} = n\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\omega_n}{n^p}\right)\log n - (n+1)\log(n+1) =$$
$$= (n+1)\log n + \frac{\omega_n \log n}{n^{p-1}} - (n+1)\log(n+1) =$$
$$= \frac{\omega_n \log n}{n^{p-1}} + (n+1)\log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right). \quad (16)$$

Множитель ω_n остается по условию ограниченным, отношение же $\frac{\log n}{n^{p-1}}$ стремится к нулю при $n \to \infty$, так как по условию $p - 1 > 0$, и $\log n$ возрастает слабее любой положительной степени n (пример 2 из [66]). Если положить $\frac{1}{n+1} = -x$, то $x \to 0$, и второе слагаемое справа будет

$$(n+1)\log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{\log(1+x)}{x},$$

т. е. оно стремится к (-1) [38]. Мы видим, таким образом, что в данном случае ряд $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ расходится и $\left(\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1}\right) \to -1$ при $n \to \infty$, а потому, при достаточно больших n, будет: $\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} < 0$, т. е. ряд (9) будет расходящимся [139], что и требовалось доказать.

Приведенные выше признаки сходимости могут применяться и к рядам с какими угодно членами, если заменить в них u_n на $|u_n|$. Но в этом случае они дают только возможность сказать, будет ли данный ряд *абсолютно сходящимся* или не будет таковым. Из них можно будет извлечь, вообще говоря, условие *абсолютной сходимости*, но не условие *расходимости*, так как мы знаем, что ряд может быть не абсолютно сходящимся, но и не расходящимся [124]. Таким путем мы получаем:

Дополнение к признаку Гаусса. *Ряд*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \quad (17)$$

с какими угодно членами, для которого

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\omega_n}{n^p}, \quad (18)$$

где $p > 1$ и $|\omega_n| < A$, *будет абсолютно сходящимся при* $\mu > 1$.

Нетрудно показать, что он будет расходящимся при $\mu < 0$. В самом деле, в этом случае мы имеем, принимая во внимание ограниченность ω_n:

$$\frac{\omega_n}{\mu n^{p-1}} \to 0, \quad 1 + \frac{\omega_n}{\mu n^{p-1}} \to 1 \quad \text{при } n \to \infty,$$

а потому, начиная с некоторого значения n, в силу условия $\mu < 0$:

$$\frac{\mu}{n} + \frac{\omega_n}{n^p} = \frac{\mu}{n}\left(1 + \frac{\omega_n}{\mu n^{p-1}}\right) < 0 \quad \text{и} \quad \left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| < 1,$$

т. е., начиная с этого значения n, члены ряда возрастают по абсолютному значению, и общий член ряда u_n не может стремиться к нулю при $n \to \infty$, т. е. ряд (17) будет расходящимся.

141. Гипергеометрический ряд. Применим предыдущие общие соображения к так называемому *гипергеометрическому ряду*, или *ряду Гаусса:*

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\,\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n + \ldots \quad (19)$$

Некоторые функции, встречающиеся в приложениях, приводятся к таким рядам. Непосредственной подстановкой чисел α, β и γ легко проверить, например, следующие равенства:

$$F(1, \beta, \beta; x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x},$$
$$F(-m, \beta, \beta; x) = (1+x)^m,$$
$$\left.\frac{F(\alpha, \beta, \beta; -x) - 1}{\alpha}\right|_{\alpha=0} = \log(1+x). \quad (20)$$

Для исследования сходимости ряда (19) составим отношение последующего члена к предыдущему:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}x \to x \quad \text{при } n \to \infty, \quad (21)$$

т. е. по следствию из [121] ряд (19) сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Остаются только случаи: 1) $x = 1$ и 2) $x = -1$. Заметим еще, что при всех достаточно больших n множители $(\alpha+n)$, $(\beta+n)$ и $(\gamma+n)$ будут положительными, так что при $x = 1$ все члены ряда при достаточно большом n имеют один и тот же знак, а при $x = -1$ получится при больших n знакопеременный ряд.

В первом случае имеем, разлагая по формуле прогрессии (считая n достаточно большим) и перемножая полученные абсолютно сходящиеся ряды почленно [138]:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)} =$$
$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{n^2}-\frac{\alpha^3}{n^3}+\ldots\right)\left(1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}-\frac{\beta^3}{n^3}+\ldots\right) =$$
$$= 1 + \frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n} + \frac{\omega_n}{n^2},$$

где величина ω_n остается ограниченной. Далее, в рассматриваемом случае, отбросив достаточно большое число начальных членов в ряде

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma} + \ldots + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} + \ldots,$$

мы получим ряд с членами одного знака, применяя к которому признак Гаусса, получаем *абсолютную сходимость при*

$$\gamma-\alpha-\beta+1 > 1, \quad \text{т. е.} \quad \gamma-\alpha-\beta > 0,$$

и расходимость при

$$\gamma-\alpha-\beta+1\leqslant 1, \quad \text{т. е.} \quad \gamma-\alpha-\beta\leqslant 0.$$

Во втором случае, при $x=-1$, мы получаем знакопеременный, начиная с некоторого члена, ряд

$$1-\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)}-\ldots+$$
$$+(-1)^n\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}+\ldots$$

Мы имеем здесь, как и раньше:

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\omega_n}{n^2},$$

а потому, применяя дополнение к признаку Гаусса, получаем *сходимость при*

$$\gamma-\alpha-\beta+1>1, \quad \text{т. е.} \quad \gamma-\alpha-\beta>0,$$

и расходимость при

$$\gamma-\alpha-\beta+1<0, \quad \text{т. е.} \quad \gamma-\alpha-\beta<-1.$$

В случае

$$\gamma-\alpha-\beta=-1,$$

можно показать, что общий член ряда стремится к пределу, отличному от нуля, т. е. ряд будет *расходящимся* [119]. Наконец, в случае

$$-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0,$$

можно доказать, что абсолютные значения членов ряда, убывая, стремятся к нулю при $n\to\infty$, т. е. [123] ряд будет *сходящимся*, но не абсолютно. На доказательстве этих двух последних утверждений мы останавливаться не будем.

Применяя это к разложению бинома

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,$$

которое получается из (19) ($\beta=\gamma$ — произвольно) заменой α на $(-m)$ и x на $(-x)$, и которое, как мы знаем, сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$, получим, что написанный ряд будет:

абсолютно сходиться	при $m>0$,	если $x=-1$,
расходиться	при $m<0$,	если $x=-1$,
абсолютно сходиться	при $m>0$,	если $x=1$,
не абсолютно сходиться	при $-1<m<0$,	если $x=-1$,
расходиться	при $m\leqslant -1$,	если $x=1$,
обращаться в полином	при $m=$ целому числу $\geqslant 0$.	

Мы покажем дальше [149], что если ряд бинома сходится при $x=\pm 1$, то сумма его равна $(1\pm 1)^m$, т. е., соответственно, 2^m или 0.

Заметим, что в предыдущем мы считали α, β и γ отличными от нуля и целого отрицательного числа. Для γ это важно, так как в противном случае члены ряда теряют смысл (знаменатель обращается в нуль), а если α или β есть нуль или целое отрицательное число, то ряд обрывается и превращается в конечную сумму.

142. Двойные ряды. Рассмотрим прямоугольную таблицу чисел, ограниченную сверху и слева, но уходящую в бесконечность направо и вниз:

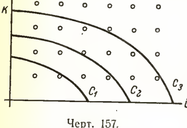
$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ \hline 1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} & \ldots & u_{1n} & \ldots \\ 2 & u_{21} & u_{22} & u_{23} & \ldots & u_{2n} & \ldots \\ 3 & u_{31} & u_{32} & u_{33} & \ldots & u_{3n} & \ldots \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m & u_{m1} & u_{m2} & u_{m3} & \ldots & u_{mn} & \ldots \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \qquad (22)$$

Она содержит бесчисленное множество *строк*, номера которых указываются первым значком, и *столбцов*, номера которых даются вторым значком при букве u. Таким образом, u_{ik} означает число, стоящее в пересечении i-й строки с k-м столбцом таблицы.

Допустим сперва, что все числа u_{ik} *положительны*.

Для того чтобы определить понятие о сумме всех чисел таблицы (22), наметим в плоскости чертежа точки с целыми положительными координатами $M(i, k)$ и проведем ряд кривых:

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots,$$



Черт. 157.

пересекающих координатные оси в первом координатном углу и подчиненных лишь тому условию, чтобы *каждая* точка M при достаточно большом n попала внутрь площади (C_n), ограниченной кривой C_n и координатными осями (черт. 157), и чтобы площадь (C_n) заключалась внутри (C_{n+1}). Составим сумму S_n всех чисел u_{ik}, соответствующих точкам, попавшим внутрь площади (C_n). При возрастании n эта сумма, очевидно, будет возрастать, и поэтому могут представиться лишь два случая: или 1) сумма S_n остается ограниченной при всех значениях n, и тогда существует конечный предел:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S,$$

или 2) сумма S_n при возрастании n беспредельно возрастает.

В случае 1) *говорят, что двойной ряд*

$$\sum_{i,\, k=1}^{\infty} u_{ik} \qquad (23)$$

сходится и имеет сумму S. *В случае* 2) *двойной ряд* (23) *называется расходящимся.*

Сумма сходящегося ряда (23) *с положительными членами не зависит от способа суммирования,* т. е. *от выбора кривых* C_n, *и может*

быть получена также путем суммирования ряда по строкам или столбцам:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}u_{ik}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_{ik}\right), \tag{24}$$

т. е. вычислением сперва суммы всех членов каждой строки (или каждого столбца) таблицы, а затем сложением полученных сумм.

В самом деле, построим какую-нибудь другую систему кривых $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n, \ldots$, обладающих тем же свойством, что $C_1, C_2, \ldots, C_n \ldots$ Обозначим через S'_n сумму всех чисел таблицы, соответствующих точкам, попавшим внутрь площади (C'_n). При заданном n можно всегда выбрать настолько большое m, чтобы площадь (C'_n) оказалась внутри (C_m), и тогда

$$S'_n \leqslant S_m \leqslant S,$$

т. е. в силу предыдущего существует конечный предел:

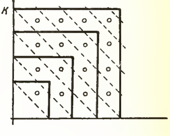
$$\lim_{n\to\infty} S'_n = S' \leqslant S.$$

Переменив роли кривых C_n и C'_n, мы точно так же докажем, что

$$S \leqslant S',$$

что возможно лишь при условии

$$S = S'.$$



Черт. 158.

Сумму двойного ряда (23) можно получить, хотя бы взяв за C_n ломаные, составленные из отрезков прямых (черт. 158):

$$i=\text{const},\quad k=\text{const}.$$

Мы получим таким путем суммирование „по квадратам“:

$$S=u_{11}+(u_{12}+u_{22}+u_{21})+\ldots+\\ +(u_{1n}+u_{2n}+\ldots+u_{nn}+u_{n,\,n-1}+\ldots+u_{n1})+\ldots$$

Суммируя же „по диагоналям“, получим:

$$S=u_{11}+(u_{12}+u_{21})+(u_{13}+u_{22}+u_{31})+\ldots+\\ +(u_{1n}+u_{2,n-1}+\ldots+u_{n1})+\ldots \tag{25}$$

Для доказательства формул (24) заметим, прежде всего, что сумма какого угодно числа членов таблицы (22) меньше S, а потому и сумма членов, стоящих в любой строке или в любом столбце, также всегда меньше S, откуда вытекает сходимость каждого из рядов:

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_{ik}=s'_i,\qquad \sum_{i=1}^{\infty}u_{ik}=s''_k.$$

Мы имеем сверх того для любых конечных значений чисел m и n:

$$\left.\begin{aligned} s_1' + s_2' + \ldots + s_m' &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}\right) \leqslant S, \\ s_1'' + s_2'' + \ldots + s_n'' &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ik}\right) \leqslant S. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

В самом деле, будем рассматривать только первые m строк таблицы (22). Взяв из них элементы первых p столбцов, мы имеем, очевидно:

$$\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{m} u_{ik}\right) \leqslant S.$$

По правилу сложения рядов [119] имеем:

$$s_1' + s_2' + \ldots + s_m' = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m} u_{ik}\right) = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{m} u_{ik}\right) \leqslant S,$$

так как выражение, стоящее под знаком предела, не больше S.

Аналогичным образом доказывается и второе из неравенств (26).

Неравенства (26) показывают, что оба ряда:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i' = \sigma', \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ik}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k'' = \sigma''$$

сходятся и имеют суммы, не превосходящие S, т. е.

$$\sigma' \leqslant S \quad \text{и} \quad \sigma'' \leqslant S.$$

С другой стороны, ясно, что при любом выборе системы кривых C_r, все члены, входящие в состав суммы S_r, войдут в состав обеих сумм:

$$s_1' + s_2' + \ldots + s_m', \quad s_1'' + s_2'' + \ldots + s_m'',$$

при достаточно большом m, т. е.

$$S_r \leqslant s_1' + \ldots + s_m' \leqslant \sigma', \quad S_r \leqslant s_1'' + \ldots + s_m'' \leqslant \sigma'',$$

а потому и в пределе

$$S = \lim_{r\to\infty} S_r \leqslant \sigma' \quad \text{и} \quad S \leqslant \sigma''.$$

Ввиду $\sigma' \leqslant S$ и $\sigma'' \leqslant S$, это возможно лишь при условии

$$\sigma' = \sigma'' = S,$$

что и требовалось доказать.

Из двойных рядов с какими угодно членами мы остановимся только на *абсолютно сходящихся рядах*, т. е. таких, *для которых двойной ряд, составленный из абсолютных значений*

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |u_{ik}|,$$

сходится.

Применяя рассуждения, аналогичные рассуждениям [124], можно показать, что и *для таких рядов существует сумма:*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ik}\right), \tag{27}$$

которая также не зависит от способа суммирования и, в частности, может быть получена суммированием по строкам и по столбцам.

Замечание. Многие свойства абсолютно сходящихся простых рядов распространяются и на двойные абсолютно сходящиеся ряды; в частности, замечание из [124]: *если каждый член двойного ряда по абсолютному значению не превосходит члена сходящегося двойного ряда с положительными членами, то данный ряд абсолютно сходящийся.*

Точно так же распространяется свойство 2) из [120].

Примеры. 1. Ряд

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\alpha} k^{\beta}} \tag{28}$$

сходится при $\alpha > 1$, $\beta > 1$, ибо, суммируя по квадратам, мы имеем:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{i^{\alpha} k^{\beta}}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\alpha}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\beta}}\right) < AB,$$

где A и B обозначают сумму рядов

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\alpha}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\beta}},$$

сходящихся при $\alpha > 1$, $\beta > 1$ [122].

2. Ряд

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{1}{(i+k)^{\alpha}} \tag{29}$$

сходится при $\alpha > 2$ и расходится при $\alpha \leqslant 2$, так как, суммируя по диагоналям, мы имеем:

$$S_n = \frac{1}{2^{\alpha}} + 2\cdot\frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots + (n-1)\cdot\frac{1}{n^{\alpha}} =$$
$$= \frac{1}{2^{\alpha-1}}\left(1-\frac{1}{2}\right) + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

откуда, подставляя вместо $\left(1-\frac{1}{n}\right)$ сначала $\frac{1}{2}$, т. е. меньшее число, а затем 1, т. е. большее число, находим:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right] < S_n < \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ при $\alpha > 2$ и расходимость его при $\alpha \leqslant 2$ доказывают наше утверждение.

3. *Если a и c положительны* и $b^2 - ac < 0$, *то ряд*

$$\sum_{i,\, k=1}^{\infty} \frac{1}{(ai^2 + 2bik + ck^2)^p} \tag{30}$$

сходится при $p > 1$ и *расходится при* $p \leqslant 1$.

Пусть сперва $b \geqslant 0$. Так как, очевидно:

$$i^2 + k^2 \geqslant 2ik,$$

то, обозначив через A_1 меньшее из чисел a и c, через A_2 — большее из чисел a, b, c, имеем:

$$2A_1 ik \leqslant ai^2 + 2bik + ck^2 \leqslant A_2 (i+k)^2,$$

откуда, ограничиваясь единственно интересным случаем $p > 0$, выводим:

$$\frac{1}{A_2^p} \frac{1}{(i+k)^{2p}} \leqslant \frac{1}{(ai^2 + 2bik + ck^2)^p} \leqslant \frac{1}{(2A_1)^p} \frac{1}{i^p k^p},$$

что в силу примеров 1 и 2 и сделанного выше замечания дает сходимость при $p > 1$ и расходимость при $p \leqslant 1$, причем существенно отметить, что множители $\frac{1}{A_2^p}$ и $\frac{1}{(2A_1)^p}$ от i и k не зависят.

Пусть теперь $b < 0$. Обозначив через A_0 большее из чисел a, c, $|b|$, в силу очевидного неравенства $(\sqrt{a}i)^2 + (\sqrt{c}k)^2 > 2\sqrt{acik}$:

$$2(b + \sqrt{ac})\, ik \leqslant ai^2 + 2bik + ck^2 < A_0 (i+k)^2,$$

причем $b + \sqrt{ac} > 0$, так как по условию $|b| < \sqrt{ac}$. Дальше доказательство проводится так же, как и в случае $b > 0$.

143. Ряды с переменными членами. Равномерно сходящиеся ряды. Формулы Тэйлора и Маклорена представляют примеры рядов, члены которых зависят от переменной x. Во второй части курса мы познакомимся с весьма важными *тригонометрическими* рядами, которые имеют вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

члены которых зависят также не только от n, но и от переменной x.

Мы займемся теперь, вообще, рядами с переменными членами, зависящими от некоторой независимой переменной x.

Пусть имеем бесконечную последовательность функций:

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots, \tag{31}$$

определенных в промежутке (a, b). *Если бесконечный ряд*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{32}$$

сходится при всех значениях x в этом промежутке, т. е. *при $a \leqslant x \leqslant b$, мы будем говорить, что он сходится в промежутке (a, b).*

Сумма n первых членов ряда (32), сумма всего ряда и остаток его будут, очевидно, функциями от x; мы их обозначим соответственно через

$$s_n(x),\ s(x),\ r_n(x),$$

так что

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x), \quad r_n(x) = s(x) - s_n(x). \tag{33}$$

Если ряд (32) сходится в промежутке (a, b) и имеет сумму $s(x)$, то это значит, что при каждом данном значении x из (a, b), задав произвольно положительное число ε, можно найти такое число N, чтобы при всех значениях $n > N$ мы имели

$$|r_n(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N,$$

причем, очевидно, это число N будет зависеть от выбора ε. Необходимо, однако, отметить, что N будет, вообще говоря, зависеть еще от выбранного значения x, т. е. может иметь различные значения при заданном ε и различном выборе x из промежутка (a, b), и его мы будем обозначать через $N(x)$. *Если при любом данном положительном ε можно найти такое число N, не зависящее от x, чтобы при любом значении x из промежутка (a, b) выполнялось неравенство:*

$$|r_n(x)| < \varepsilon \tag{34}$$

при всех $n > N$, то ряд (32) *называют равномерно сходящимся в промежутке (a, b).*

Рассмотрим, например, ряд

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \ldots - \frac{1}{(x+n-1)(x+n)} - \ldots, \tag{35}$$

причем x меняется в промежутке $(0, a)$, где a — любое данное положительное число.

Нетрудно видеть, что ряд можно переписать так:

$$\frac{1}{x+1} - \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) - \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}\right) - \ldots,$$

так что в данном случае

$$s_n(x) = \frac{1}{x+n}, \qquad s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = 0, \qquad r_n(x) = -\frac{1}{x+n},$$

и если мы хотим сделать

$$|r_n(x)| = \frac{1}{x+n} < \varepsilon, \tag{36}$$

то достаточно взять

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - x = N(x). \tag{37}$$

Если теперь мы хотим, чтобы неравенство (36) выполнялось при всех значениях x в промежутке $(0, a)$, при условии $n > N$, независимо от взятого значения x, то достаточно положить $N = \frac{1}{\varepsilon} \geqslant N(x)$, так как тогда неравенство (37), а потому и (36), при условии $n > N$, будет выполнено наверное при всех значениях x в промежутке $(0, a)$. Итак, ряд (35) будет равномерно сходящимся в промежутке $(0, a)$.

Не всякий ряд обладает свойством равномерной сходимости, так как не для всякого ряда можно указать не зависящее от x число N, которое было бы не меньше всех $N(x)$ в промежутке (a, b).

Рассмотрим, например, в промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$ ряд

$$x + x(x-1) + x^2(x-1) + \ldots + x^{n-1}(x-1) + \ldots \tag{38}$$

Сумма первых n членов будет:

$$s_n(x) = x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ldots + (x^n - x^{n-1}),$$

т. е.

$$s_n(x) = x^n,$$

и, следовательно [26]:

$$s(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x) = 0 \qquad \text{при } 0 \leqslant x < 1$$

и

$$r_n(x) = s(x) - s_n(x) = -x^n \quad \text{при } 0 \leqslant x < 1.$$

При $x = 1$ мы имеем, подставляя в (38) $x = 1$, ряд

$$1 + 0 + 0 + \ldots,$$

т. е.

$$s_n(x) = 1, \qquad s(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x) = 1,$$

$$r_n(x) = s(x) - s_n(x) = 0$$

при $x = 1$ и при любом n. Ряд (38) сходится во всем промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$, но в этом промежутке сходимость неравномерна. Действительно, в силу $r_n(x) = -x^n$ при $0 \leqslant x < 1$, если мы хотим, чтобы выполнялось неравенство (34) $|r_n(x)| < \varepsilon$, то должно быть:

$$x^n < \varepsilon, \quad \text{т. е.} \quad n \log x < \log \varepsilon,$$

или, деля на отрицательное число $\log x$, получим:

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log x}.$$

Итак, в данном случае $N(x) = \frac{\log \varepsilon}{\log x}$ и не может быть заменено меньшим.

При приближении x к единице, $\log x \to 0$, функция $N(x)$ возрастает беспредельно, и нельзя указать такое значение N, чтобы неравенство (34) выполнялось при $n > N$ во всем промежутке $(0, 1)$. Вследствие этого обстоятельства, хотя ряд (38) и сходится во всем промежутке $(0, 1)$, в том числе и при $x = 1$, однако сходимость его будет все медленнее при приближении x к единице; для достаточного приближения к сумме ряда нужно будет брать все больше членов, чем ближе x будет к единице. Заметим, однако, что при самом значении $x = 1$ ряд просто обрывается на втором члене.

Укажем теперь другое определение равномерной сходимости, равносильное прежнему определению. Выше мы формулировали [125] необходимое и достаточное условие сходимости ряда. В рассматриваемом случае оно формулируется так: для сходимости ряда (32) в промежутке (a, b) необходимо и достаточно, чтобы при любом заданном положительном ε и любом x из (a, b) существовало такое N, что

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon \tag{39}$$

при $n > N$ и любом целом положительном p. Это N при заданном ε может зависеть еще от выбора x. *Если же при любом заданном положительном ε существует число N одно и то же для всех x из (a, b) такое, что при $n > N$ и любом целом положительном p выполняется* (39), *то говорят, что ряд* **(32)** *сходится равномерно в промежутке (a, b).*

Надо показать, что это новое определение равномерной сходимости равносильно прежнему определению, т. е. если ряд равномерно сходится в прежнем смысле, то он равномерно сходится и в новом смысле, и наоборот. Итак, пусть сначала ряд равномерно сходится в прежнем смысле, т. е. $|r_n(x)| < \varepsilon$ при $n > N$, где x — любое значение из (a, b) и N не зависит от x. Мы имеем, очевидно:

$$u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x) = r_n(x) - r_{n+p}(x) \tag{40}$$

и, следовательно:

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant |r_n(x)| + |r_{n+p}(x)|,$$

что при $n > N$ и, следовательно, $n + p > N$ дает:

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < 2\varepsilon. \tag{41}$$

Ввиду произвольного выбора ε мы видим, что ряд равномерно сходится в новом смысле. Положим теперь, что ряд равномерно сходится в новом смысле, т. е. что выполнено неравенство (39) при $n > N$, не зависящем от x, любом целом положительном p и любом x из (a, b). Из этого следует, что ряд сходится, и мы можем образовать

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots = \lim_{p \to \infty} [u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)],$$

причем из неравенства (39) при $p \to \infty$ получаем в пределе:

$$|r_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

при $n > N$, т. е. из нового определения равномерной сходимости, в силу произвольности ε, вытекает прежнее, и равносильность обоих определений доказана.

Отметим, что при первом определении равномерной сходимости (34) мы используем $r_n(x)$ и тем самым уже дополнительно предполагаем, что ряд сходится. Второе определение равномерной сходимости (39) включает и самый факт сходимости ряда.

144. Равномерно сходящиеся последовательности функций. Последовательность функций:

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \ldots,\ s_n(x),\ \ldots, \tag{42}$$

которую мы рассматривали выше, была определена с помощью ряда (32); $s_n(x)$ означало сумму n первых членов ряда. Но можно рассматривать последовательность (42) саму по себе, считая ее данной, и уже по ней построить ряд, суммой n первых членов которого является n-й член последовательности $s_n(x)$. Члены этого ряда определяются, очевидно, по формулам:

$$u_1(x) = s_1(x),\ u_2(x) = s_2(x) - s_1(x), \ldots, u_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x), \ldots \tag{43}$$

Очень часто последовательность (42) бывает проще (43), как это имело место и в рассмотренных примерах.

Таким путем мы приходим к понятиям о сходящейся и равномерно сходящейся последовательности функций:

Если дана последовательность функций (42):

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \ldots,\ s_n(x),\ \ldots,$$

определенных в промежутке (a, b), *и если при каждом значении* x *в этом промежутке существует предел:*

$$s(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x), \tag{44}$$

то последовательность (42) *называется сходящейся в промежутке* (a, b), *функция же* $s(x)$ *называется предельной функцией последовательности* (42).

Если, сверх того, при любом данном наперед положительном ε *существует такое число* N, *не зависящее от* x, *что неравенство:*

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon \qquad (45)$$

имеет место при всех значениях $n > N$ *во всем промежутке* (a, b), *то последовательность* (42) *называется равномерно сходящейся в промежутке* (a, b). *Условие* (45) *можно заменить равносильным ему:*

$$|s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon \qquad (46)$$

при m и $n > N$.

Черт. 159.

Условие равномерной сходимости последовательности (42) *равносильно условию равномерной сходимости ряда*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \qquad (47)$$

где (43)

$$u_1(x) = s_1(x), \quad u_2(x) = s_2(x) - s_1(x), \ \ldots, \ u_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x), \ \ldots$$

Равносильность условий (45) и (46) при исследовании равномерной сходимости последовательностей может быть доказана совершенно так же, как выше была установлена равносильность условий (35) и (36) для бесконечных рядов. Отметим еще, что из равномерной сходимости $s_n(x)$ в промежутке (a, b) непосредственно следует и равномерная сходимость в любой части (a, b).

Понятие о равномерной сходимости последовательностей может быть истолковано и геометрически. Если мы изобразим графически функции $s(x)$ и $s_n(x)$ при различных значениях n, то для равномерно сходящейся последовательности наибольший отрезок ординаты, заключенной между кривыми $s_n(x)$ и $s(x)$, должен стремиться к нулю, при $n \to \infty$ для всех x из (a, b); для неравномерно сходящейся последовательности это условие не будет выполнено.

Обстоятельство это наглядно проверяется на черт. 159 и 160, сделанных для разобранных выше примеров:

$$s_n(x) = \frac{1}{x+n}, \quad s_n(x) = x^n. \text{[1]}$$

Черт. 160.

В случае черт. 160 предельная функция $s(x)$ графически изображается отрезком (0,1) оси OX, исключая точку 1, и отдельной точкой с координатами (1, 1).

[1]) Для большей наглядности черт. 159 и 160 выполнены при разных масштабах для x и y.

Правда, в последнем примере предельная функция $s(x)$ не непрерывна. Но нетрудно привести пример сходящейся последовательности, предельная функция которой непрерывна, но которая тем не менее сходится неравномерно.

Таким свойством обладает хотя бы последовательность (черт. 161):

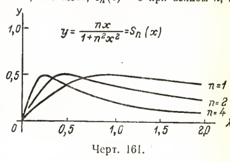
$$s_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant a). \tag{48}$$

Мы имеем, очевидно, при $x \neq 0$:

$$\frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{\frac{1}{n^2}+x^2}$$

и, при $n \to \infty$, первый множитель справа $\frac{1}{n} \to 0$, а второй стремится к $\frac{1}{x}$, т. е. $s_n(x) \to 0$ при $x \neq 0$. При $x=0$, очевидно, $s_n(0)=0$ при всяком n, и, следовательно, при всех x из $(0, a)$, где a — некоторое положительное число:

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = 0.$$



Черт. 161.

Однако максимальная величина отрезка ординаты между кривыми $s_n(x)$ и $s(x)$, которая в рассматриваемом случае приводится просто к ординате кривой $s_n(x)$, так как $s(x)=0$, будет $\frac{1}{2}$ $\left(\text{и будет соответствовать значению } x = \frac{1}{n}\right)$. Так как она не стремится к нулю при $n \to \infty$, то последовательность (48) не будет равномерно сходящейся в промежутке $(0, a)$; и, действительно, если мы хотим, чтобы было:

$$|s(x) - s_n(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \varepsilon,$$

то, решая относительно n неравенство 2-й степени:

$$0 < 1 - \frac{x}{\varepsilon} n + x^2n^2$$

и считая ε достаточно малым, получим:

$$n > \frac{1}{2x\varepsilon}\left[1 + \sqrt{1-4\varepsilon^2}\right] = N(x).$$

Функция эта возрастает беспредельно при $x \to 0$, что и обуславливает неравномерную сходимость последовательности.

Заметим, наконец, что те же черт. 160 и 161 показывают, что последовательность x^n равномерно сходится в промежутке $(0, q)$, где q — любое положительное число, меньшее единицы, а последовательность $\frac{nx}{1+n^2x^2}$ равномерно сходится в промежутке (q, a), где $0 < q < a$, в чем нетрудно убедиться и непосредственным вычислением.

145. Свойства равномерно сходящихся последовательностей. 1. *Предельная функция равномерно сходящейся в промежутке (a, b) последовательности непрерывных функций также непрерывна.* Пусть

$$s_1(x),\quad s_2(x),\ \ldots,\ \ s_n(x),\ \ldots$$

данная последовательность функций, причем все они непрерывны в промежутке (a, b), и пусть

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

ее предельная функция. Нам нужно доказать, что, задав наперед сколь угодно малое положительное число ε, можно найти такое число δ, чтобы было [35]:

$$|s(x+h) - s(x)| < \varepsilon, \tag{49}$$

если $$|h| < \delta,$$

при условии, что оба числа x и $x+h$ лежат в промежутке (a, b). Мы можем писать при любом n:

$$\begin{aligned} |s(x+h) - s(x)| &= \\ &= |[s(x+h) - s_n(x+h)] + [s_n(x+h) - s_n(x)] + [s_n(x) - s(x)]| \leqslant \\ &\leqslant |s(x+h) - s_n(x+h)| + |s(x) - s_n(x)| + |s_n(x+h) - s_n(x)|. \end{aligned}$$

В силу определения равномерной сходимости, мы можем выбрать n настолько большим, чтобы во всем промежутке (a, b), в том числе и при значениях x и $x+h$, было:

$$|s(x+h) - s_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3},\quad |s(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Выбрав так n и фиксировав его, в силу непрерывности функции $s_n(x)$ [35], мы можем найти такое число δ, чтобы было:

$$|s_n(x+h) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3},\quad \text{если}\quad |h| < \delta.$$

Сопоставив все эти неравенства, мы и получим неравенство (49).

Если последовательность функций сходится неравномерно, то предельная функция может и не быть непрерывной, примером чего может служить хотя бы последовательность x^n в промежутке $(0, 1)$.

Обратное утверждение, однако, неверно, — и для неравномерно сходящейся последовательности предельная функция может быть непрерывной, например, для последовательности:

$$\frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

2. *Если*

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \ldots,\ s_n(x),\ \ldots$$

есть равномерно сходящаяся последовательность непрерывных в промежутке (a, b) функций и (α, β) — любой промежуток, лежащий в (a, b), то

$$\int_\alpha^\beta s_n(x)\,dx \to \int_\alpha^\beta s(x)\,dx \tag{50}$$

или, иначе,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta s_n(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \lim_{n\to\infty} s_n(x)\,dx. \tag{51}$$

Если пределы интегрирования переменные, например, $\beta = x$, *то последовательность функций*

$$\int_{\alpha}^{x} s_n(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{52}$$

также сходится равномерно в промежутке (a, b). (Процесс этот называется *переходом к пределу под знаком интеграла.*)

Заметим, прежде всего, что, в силу свойства 1) предельная функция $s(x)$ также непрерывна. Рассмотрим теперь разность:

$$\int_{\alpha}^{\beta} s(x)\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} s_n(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} [s(x) - s_n(x)]\,dx.$$

Задав число ε, мы можем, в силу равномерной сходимости, найти такое число N, чтобы при всех значениях $n > N$, во всем промежутке (a, b) мы имели:

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon,$$

а потому [95], (10_1):

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} [s(x) - s_n(x)]\,dx\right| \leqslant \int_{\alpha}^{\beta} |s(x) - s_n(x)|\,dx < \int_{\alpha}^{\beta} \varepsilon\,dx = \varepsilon(\beta - \alpha) \leqslant \varepsilon(b - a).$$

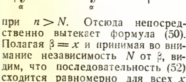
Итак, для любого промежутка (α, β), заключающегося в (a, b), имеем:

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} s(x)\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} s_n(x)\,dx\right| < \varepsilon(b - a)$$

при $n > N$. Правая часть неравенства не зависит от α и β и стремится к нулю, если $\varepsilon \to 0$. Ввиду произвольности ε мы можем формулировать результат так: при любом заданном положительном ε_1 существует N, не зависящее от α и β, такое, что

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} s(x)\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} s_n(x)\,dx\right| < \varepsilon_1$$

при $n > N$. Отсюда непосредственно вытекает формула (50). Полагая $\beta = x$ и принимая во внимание независимость N от β, видим, что последовательность (52) сходится равномерно для всех x из (a, b).



Черт. 162.

Для неравномерно сходящихся последовательностей эта теорема может оказаться и неверной. Пусть, например:

$$s_n(x) = nxe^{-nx^2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

(черт. 162). Нетрудно показать, разбирая отдельно случаи $x > 0$ и $x = 0$, что при всяком x в промежутке $(0, 1)$

$$s_n(x) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

так что здесь $s(x)=0$. Последовательность эта, однако, не может быть равномерно сходящейся, так как наибольшая ордината кривой $y=s_n(x)$, или, что то же самое, наибольшая величина разности $s_n(x)-s(x)$, которая получается при $x=\frac{1}{\sqrt{2n}}$, возрастает беспредельно при $n\to\infty$.

С другой стороны, мы имеем:

$$\int_0^1 s_n(x)\,dx = n\int_0^1 xe^{-nx^2}dx =$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-nx^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-n}) \to \frac{1}{2},$$

в то время как

$$\int_0^1 s(x)\,dx = 0.$$

3. *Если функции последовательности:*

$$s_1(x),\quad s_2(x),\ \ldots,\quad s_n(x),\ \ldots$$

имеют непрерывные производные:

$$s'_1(x),\quad s'_2(x),\ \ldots,\quad s'_n(x),\ \ldots$$

в промежутке (a, b), *причем последовательность* $s'_n(x)$ *равномерно сходится к предельной функции* $\sigma(x)$, *а последовательность* $s_n(x)$ *сходится к предельной функции* $s(x)$, *то* $s_n(x)$ *также сходится равномерно и*

$$\sigma(x) = \frac{ds(x)}{dx}, \tag{53}$$

или иначе:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ds_n(x)}{dx} = \frac{d\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)}{dx}. \tag{54}$$

Процесс этот называется *переходом к пределу под знаком производной.*

Пусть α — любое постоянное, x — переменное значение на промежутке (a, b). В силу свойства 2) мы имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^x s'_n(x)\,dx = \int_\alpha^x \sigma(x)\,dx.$$

Но

$$\int_\alpha^x s'_n(x)\,dx = s_n(x) - s_n(\alpha) \to s(x) - s(\alpha),$$

а потому предыдущая формула дает:

$$s(x) - s(\alpha) = \int_\alpha^x \sigma(x)\,dx.$$

Дифференцируя это равенство и пользуясь известными свойствами определенного интеграла (свойство VII) [95], мы имеем:

$$\frac{ds(x)}{dx} = \sigma(x),$$

что и требовалось доказать. Остается доказать равномерную сходимость последовательности $s_n(x)$. Имеем:

$$s_n(x) = s_n(\alpha) + \int_\alpha^x s'_n(x)\,dx.$$

Последовательность $s_n(\alpha)$ сходится и вовсе не содержит x. Последовательность $\int_\alpha^x s'_n(x)\,dx$ сходится равномерно в силу свойства 2). Отсюда и вытекает равномерная сходимость $s_n(x)$, так как из определения равномерной сходимости непосредственно вытекает, что сумма двух равномерно сходящихся последовательностей есть также равномерно сходящаяся последовательность. Кроме того, всякая сходящаяся последовательность, члены которой не содержат x, как, например, $s_n(\alpha)$, подходит под определение равномерно сходящейся последовательности.

Заметим еще, что мы доказали равномерную сходимость $s_n(x)$ во всем промежутке (a, b), используя лишь равномерную сходимость $s'_n(x)$ и сходимость $s_n(\alpha)$, и, следовательно, при формулировке последнего свойства достаточно потребовать сходимости $s_n(x)$ в одной точке $x = \alpha$. Отсюда, как мы уже сказали, будет вытекать равномерная сходимость $s_n(x)$ во всем промежутке (a, b).

146. Свойства равномерно сходящихся рядов. Если в предыдущих предложениях мы будем считать $s_n(x)$ суммой n первых членов данного ряда

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

а $s(x)$ — суммой всего ряда, то непосредственно получим аналогичные предложения для рядов с переменными членами.

1. *Если члены ряда*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{55}$$

непрерывные в промежутке (a, b) функции и ряд сходится равномерно, то и сумма его $s(x)$ есть непрерывная функция в промежутке (a, b).

2. *Если члены ряда* (55) *непрерывные в промежутке (a, b) функции и ряд сходится равномерно, то его можно почленно интегрировать между какими угодно пределами α, β, лежащими в промежутке (a, b)*, т. е.

$$\int_\alpha^\beta \sum_{n=1}^\infty u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_\alpha^\beta u_n(x)\,dx. \tag{56}$$

Если пределы интегрирования переменные, например, $\beta = x$, то ряд, который получается почленным интегрированием:

$$\int_\alpha^x u_1(x)\,dx + \int_\alpha^x u_2(x)\,dx + \ldots + \int_\alpha^x u_n(x)\,dx + \ldots, \tag{57}$$

также равномерно сходится в промежутке (a, b),

3. *Если ряд* (55) *сходится в промежутке* (a, b) *и его члены имеют непрерывные в промежутке* (a, b) *производные* $u_1'(x), \ldots, u_n'(x), \ldots$, *причем ряд, составленный из производных*

$$u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots,$$

сходится равномерно в промежутке (a, b), *то и данный ряд сходится равномерно и его можно дифференцировать почленно,* т. е.

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{du_n(x)}{dx}. \tag{58}$$

При выводе этих предложений из теорем [145] надо только иметь в виду, что *указанные в предложениях свойства имеют,* как мы уже знаем, *место в случае конечного числа слагаемых.* Так, например, *если члены ряда* $u_n(x)$ *суть непрерывные функции, то и функции:*

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

непрерывны при любом n [34].

147. Признаки равномерной сходимости. Укажем некоторые достаточные условия равномерной сходимости. *Ряд функций, определенных в промежутке* (a, b):

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

сходится равномерно в промежутке (a, b), *если выполнено одно из следующих условий:*

(А) *Можно найти последовательность положительных постоянных*

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$$

таких, что

$$|u_n(x)| \leqslant M_n \quad \text{в промежутке } (a, b) \tag{59}$$

и ряд

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n + \ldots \tag{60}$$

сходящийся (признак Вейерштрасса).

(Б) *Функции* $u_n(x)$ *могут быть представлены в виде:*

$$u_n(x) = a_n v_n(x), \tag{61}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *суть постоянные, такие, что ряд*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{62}$$

сходится; функции же $v_1(x), \ldots, v_n(x), \ldots$ *все неотрицательны, остаются меньше постоянного положительного числа* M *и при каждом значении* x *в промежутке* (a, b):

$$v_1(x) \geqslant v_2(x) \geqslant \ldots \geqslant v_n(x) \geqslant \ldots; \; 0 \leqslant v_n(x) \leqslant M \tag{63}$$

(признак Абеля).

Доказательство (А). Так как ряд (60) сходится, то при данном ε можно найти такое число N, чтобы при всех $n > N$ и при всех p мы имели [125]:

$$M_{n+1} + M_{n+2} + \ldots + M_{n+p} < \varepsilon;$$

в силу же неравенств (59) и

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant M_{n+1} + \ldots + M_{n+p} < \varepsilon,$$

откуда [143] и вытекает равномерная сходимость ряда (55).

Доказательство (Б). Положим:

$$\sigma'_p = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} \quad (p = 1, 2, \ldots),$$

откуда непосредственно следует:

$$a_{n+1} = \sigma'_1 \quad \text{и} \quad a_{n+k} = \sigma'_k - \sigma'_{k-1} \qquad (k > 1).$$

Оценим выражение:

$$u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x) =$$
$$= a_{n+1}v_{n+1}(x) + a_{n+2}v_{n+2}(x) + \ldots + a_{n+p}v_{n+p}(x).$$

Подставляя вместо a_{n+k} их выражения через σ'_k и собирая члены с одинаковыми σ'_k, получим:

$$a_{n+1}v_{n+1}(x) + a_{n+2}v_{n+2}(x) + \ldots + a_{n+p}v_{n+p}(x) =$$
$$= \sigma'_1 v_{n+1}(x) + (\sigma'_2 - \sigma'_1)\, v_{n+2}(x) + \ldots + (\sigma'_p - \sigma'_{p-1})\, v_{n+p}(x) =$$
$$= \sigma'_1 [v_{n+1}(x) - v_{n+2}(x)] + \ldots +$$
$$+ \sigma'_{p-1}[v_{n+p-1}(x) - v_{n+p}(x)] + \sigma'_p v_{n+p}(x).$$

Принимая во внимание, что $v_{n+p}(x)$ и все разности $v_{n+k-1}(x) - v_{n+k}(x)$ по условию неотрицательны, можем написать:

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |\sigma'_1|\,[v_{n+1}(x) - v_{n+2}(x)] + \ldots + |\sigma'_{p-1}|\,[v_{n+p-1}(x) - v_{n+p}(x)] + |\sigma'_p|\, v_{n+p}(x),$$

или, обозначая через σ' наибольшее из абсолютных значений $|\sigma'_1|, |\sigma'_2|, \ldots, |\sigma'_p|$

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \sigma' \{[v_{n+1}(x) - v_{n+2}(x)] + \ldots + [v_{n+p-1}(x) - v_{n+p}(x)] + v_{n+p}(x)\}$$

получаем, производя сокращения:

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant \sigma' v_{n+1}(x). \tag{64}$$

Из определения σ'_k и сходимости ряда (62) вытекает, что для любого заданного положительного ε существует такое N, что при $n > N$ и всяком k мы имеем:

$$|\sigma'_k| < \frac{\varepsilon}{M},$$

а потому и

$$\sigma' < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Принимая во внимание еще, что по условию $0 \leqslant v_{n+p}(x) \leqslant M$, получаем в силу (64):

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

при $n > N$ и любом p. Так как N не зависит от x, то отсюда и вытекает равномерная сходимость ряда (55) в промежутке (a, b).

Примеры.
1. Ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad (p > 1) \tag{65}$$

сходятся равномерно во всяком промежутке, так как при всяком x имеем:

$$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right| \leqslant \frac{1}{n^p}, \quad \left|\frac{\sin nx}{n^p}\right| \leqslant \frac{1}{n^p},$$

и ряд $\sum \frac{1}{n^p}$ при $p > 1$ сходящийся [122] (признак Вейерштрасса).

2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} \tag{66}$$

равномерно сходится в промежутке $(0 \leqslant x \leqslant l)$ при любом l, так как, положив здесь

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x},$$

удовлетворим всем условиям признака Абеля.

148. Степенные ряды. Радиус сходимости. Весьма важный пример приложения изложенной выше теории рядов с переменными членами представляют степенные ряды, т. е. ряды вида:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{67}$$

с которыми мы уже встретились при исследовании формулы Маклорена. Подробное изучение свойств этих рядов относится к теории функций комплексной переменной, а потому здесь мы укажем только самые основные свойства.

Первая теорема Абеля. *Если степенной ряд* (67) *сходится при некотором значении* $x = \xi$, *то он сходится абсолютно при всех значениях* x, *для которых*

$$|x| < |\xi|. \tag{68}$$

Наоборот, *если он расходится при* $x = \xi$, *то расходится и при всех значениях* x, *для которых*

$$|x| > |\xi| = r. \tag{69}$$

Пусть сперва ряд

$$a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n + \ldots$$

сходится, тогда общий член сходящегося ряда должен стремиться к нулю, т. е.

$$a_n\xi^n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

а потому можно найти такую постоянную M, чтобы при всех значениях n мы имели:

$$|a_n\xi^n| \leqslant M.$$

Придадим теперь x любое значение, удовлетворяющее условию (68), и положим

$$q = \left|\frac{x}{\xi}\right| < 1.$$

Мы имеем, очевидно:

$$|a_n x^n| = \left| a_n \xi^n \frac{x^n}{\xi^n} \right| = |a_n \xi^n| \left| \frac{x}{\xi} \right|^n \leqslant Mq^n,$$

т. е. общий член ряда (67) при рассматриваемом значении x по абсолютной величине не превосходит общего члена бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а потому ряд (67) сходится абсолютно [124].

Вторая часть теоремы очевидна, так как если бы ряд (67) сходился при некотором значении x, удовлетворяющем условию (69), то по доказанному сейчас он должен был бы сходиться при всяком ξ, для которого $|\xi| < |x|$, что противоречит условию.

Следствие. *Существует вполне определенное число R, которое называется радиусом сходимости ряда* (67) *и которое обладает следующими свойствами:*

ряд (67) *сходится абсолютно при* $|x| < R$,
" (67) *расходится при* $|x| > R$.

В частности, может оказаться, что $R = 0$, и тогда ряд (67) расходится при всех значениях x, отличных от нуля, или же $R = \infty$, и тогда ряд (67) сходится при всех значениях x.

Отбросив первый случай, рассмотрим такое положительное значение $x = \xi$, при котором ряд (67) сходится. Такое значение наверное существует, если, вообще, существуют значения $x \neq 0$, при которых ряд (67) сходится. Если мы будем увеличивать число ξ, то могут встретиться лишь два случая: или все время ряд (67) будет оставаться сходящимся при $x = \xi$, даже когда ξ увеличивается беспредельно; тогда мы имеем, очевидно, $R = \infty$; или же будет существовать такое постоянное число A, которое обладает тем свойством, что при всех $\xi < A$ ряд (67) сходится, но при $\xi > A$ ряд делается расходящимся.

Существование такого числа A интуитивно-геометрически вполне очевидно, так как на основании первой теоремы Абеля, если ряд при каком-нибудь значении ξ сделается расходящимся, то он будет расходиться и при всех больших значениях. Строгое доказательство существования числа A может быть проведено на основании теории иррациональных чисел. Очевидно, что это число A и будет радиусом сходимости R ряда (67).

Проведем доказательство существования R. Разобьем все вещественные числа на два класса следующим образом: к первому классу отнесем все отрицательные числа, нуль и такие положительные числа ξ, что ряд (67) сходится при $|x| = \xi$, а ко второму классу отнесем все остальные вещественные числа. В силу доказанной теоремы любое число первого класса меньше любого числа второго класса, т. е. мы произвели сечение в области вещественных чисел, а потому или в первом классе есть наибольшее число или во втором есть наименьшее число [40]. Нетрудно видеть, что это число и будет радиусом сходимости R ряда. Если все числа попадут в первый класс, то надо считать $R = \infty$.

149. Вторая теорема Абеля. *Если R есть радиус сходимости ряда* (67), *то ряд сходится не только абсолютно, но и равномерно в любом промежутке (a, b), лежащем целиком внутри промежутка $(-R, +R)$, т. е. для которого*

$$-R < a < b < R.$$

Если же ряд сходится и при $x = R$ или $x = -R$, то он будет равномерно сходящимся и в промежутке (a, R) или $(-R, b)$.

Заметим, прежде всего, что, не нарушая общности, мы можем считать $R = 1$, введя вместо x новую независимую переменную t по формуле

$$x = Rt,$$

после чего ряд (67) превратится в степенной ряд относительно переменной t, а промежуток $(-R, +R)$ перейдет в $(-1, 1)$.

Если $R=1$, то, по определению радиуса сходимости, ряд (67) будет сходиться абсолютно при всяком значении $x=\xi$, для которого $|\xi|<1$. Рассмотрим теперь любой промежуток (a, b), лежащий внутри $(-R, R)$, так что

$$-1<a<b<1.$$

Выберем за ξ любое число, лежащее внутри $(-1, 1)$, но по абсолютному значению большее $|a|$ и $|b|$. При всяком x в промежутке (a, b) имеем:

$$|a_n x^n|<|a_n \xi^n|,$$

и так как ряд

$$a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+\ldots+a_n\xi^n+\ldots$$

сходится абсолютно и члены его не зависят от x, то по признаку Вейерштрасса ряд (67) сходится равномерно в промежутке (a, b).

Допустим теперь, что ряд (67) сходится и при $x=1$, т. е. что ряд

$$a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

сходится. Полагая

$$v_n(x)=x^n,$$

мы можем применить к ряду (67) признак Абеля, который покажет, что ряд (67) будет равномерно сходиться во всем промежутке $(a, 1)$, где a — любое число, большее -1.

Случай, когда ряд (67) сходится при $x=-1$, приводится к предыдущему, если заменить x на $(-x)$.

Обозначим через $f(x)$ сумму ряда (67). Она существует, конечно, лишь при тех значениях x, при которых ряд сходится. Пусть R — радиус сходимости ряда. Принимая во внимание равномерную сходимость ряда во всяком промежутке (a, b), для которого

$$-R<a<b<R, \tag{70}$$

и свойство 1) из [146], можем утверждать, *что сумма ряда $f(x)$ есть непрерывная функция во всяком из указанных промежутков* (a, b). Иначе говорят, что $f(x)$ *непрерывна внутри промежутка* $(-R, +R)$. Дальше мы увидим, что эта функция имеет сколько угодно производных внутри промежутка $(-R, +R)$. Если ряд (67) сходится и при $x=R$, то в силу доказанной равномерной сходимости во всяком промежутке (a, R), где $a>-R$, $f(x)$ будет непрерывной функцией в этом промежутке, и, в частности, $f(R)$ будет пределом $f(x)$ при стремлении x к R слева [35]:

$$f(R)=\lim_{x\to R-0} f(x). \tag{71}$$

Аналогично при сходимости ряда для $x=-R$.

Выше мы видели, что разложение бинома Ньютона [131]:

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots$$

имеет радиус сходимости $R=1$ и в некоторых случаях сходится при $x=\pm 1$. В силу только что доказанного можно утверждать, что если, например, ряд сходится при $x=1$, то его сумма при этом равна

$$\lim_{x\to 1-0}(1+x)^m=2^m,$$

150. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда. Пусть R — радиус сходимости ряда

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{72}$$

Интегрируя его почленно от 0 до x и дифференцируя его, мы получим два других степенных ряда:

$$a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \ldots \tag{73}$$

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots \tag{74}$$

Покажем, что они имеют тот же радиус сходимости R. Для этого надо показать, что они сходятся, если $|x| < R$, и расходятся, если $|x| > R$.

По доказанному, ряд (72) сходится равномерно во всяком промежутке $(-R_1, +R_1)$, где $0 < R_1 < R$, и в силу свойства 2) из [146] его можно в этом промежутке интегрировать почленно от 0 до x, т. е. можно утверждать, что ряд (73) сходится при любом x, для которого $|x| < R$, и что при этом сумма ряда (73) равна

$$\int_0^x f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — сумма ряда (72). Покажем теперь, что и ряд (74) сходится, если $|x| < R$. Возьмем такое x, выберем какое-нибудь число ξ, лежащее между $|x|$ и R, т. е.

$$|x| < \xi < R, \tag{75}$$

и положим

$$q = \frac{|x|}{\xi} < 1.$$

Для членов ряда (74) получаем оценку:

$$|na_nx^{n-1}| = \left| na_n\xi^n \frac{x^{n-1}}{\xi^{n-1}} \cdot \frac{1}{\xi} \right|,$$

и в силу предыдущего:

$$|na_nx^{n-1}| \leqslant nq^{n-1}\frac{1}{\xi}|a_n\xi^n|.$$

Применяя к ряду $\sum nq^{n-1}$ признак Даламбера, нетрудно показать, что он сходится при $0 < q < 1$ и, следовательно [119]:

$$nq^{n-1} \to 0 \text{ при } n \to \infty, \tag{76}$$

а потому, при всех достаточно больших n:

$$|na_nx^{n-1}| < |a_n\xi^n|.$$

Но в силу (75), ряд $\sum a_n\xi^n$ сходится абсолютно, а потому и ряд (74) сходится абсолютно при взятом значении x. Итак, оба ряда (73) и (74) сходятся если $|x| < R$, т. е. при почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда его радиус сходимости не может уменьшиться. Но отсюда непосредственно следует, что он не может и увеличиться. Действительно, если бы, например, радиус сходимости ряда (73) был R', причем $R' > R$, то

при дифференцировании ряда (73) мы получили бы ряд (72), и его радиус сходимости по только что доказанному был бы не меньше R', а на самом деле он равен R, причем $R < R'$. Итак, ряды (73) и (74) имеют тот же радиус сходимости R, что и ряд (72). Дифференцируя ряд (74) еще раз, получим, в силу доказанного, степенной ряд

$$2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots$$

с тем же радиусом сходимости R и т. д. Все эти степенные ряды равномерно сходятся во всяком промежутке (a, b), для которого имеет место (70); то же — при повторном почленном интегрировании. Вспоминая свойства 2) и 3) из [146], можем окончательно формулировать следующий результат:

Степенной ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \tag{77}$$

радиус сходимости которого равен R, есть непрерывная функция от x внутри промежутка $(-R, R)$.

Ряд этот можно почленно дифференцировать и интегрировать какое угодно число раз, пока x лежит внутри промежутка $(-R, R)$, причем получаемые при этом степенные ряды имеют тот же радиус сходимости R. Суммы этих рядов равны соответствующим производным и интегралам суммы ряда (77).

Полагая

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \tag{78}$$

мы получаем, таким образом:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots,$$
$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = n!\,a_n + (n+1)n\ldots3\cdot2a_{n+1}x + \ldots,$$

откуда следует при $x = 0$:

$$a_0 = f(0),\ a_1 = \frac{f'(0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(0)}{2!},\ \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \ldots$$

Подставив эти выражения для $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ в (78), получим:

$$f(x) = f(0) + \frac{xf'(0)}{1!} + \frac{x^2f''(0)}{2!} + \ldots + \frac{x^nf^{(n)}(0)}{n!} + \ldots\ (-R < x < +R),$$

т. е. *степенной ряд совпадает с разложением своей суммы по формуле Маклорена.*

Изложенная теория степенных рядов распространяется без труда на степенные ряды вида:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots \tag{79}$$

Везде роль x будет играть разность $(x-a)$. Радиус сходимости R ряда (79) определяется из того условия, что ряд сходится при $|x-a| < R$ и расходится при $|x-a| > R$. Если обозначить через $f(x)$ сумму ряда (79) в промежутке

$$-R < x - a < R, \tag{80}$$

то для коэффициентов a_n получаем выражение:

$$a_0 = f(a);\ a_1 = \frac{f'(a)}{1!};\ \ldots;\ a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!};\ \ldots,$$

т. е. *ряд* (79) *в промежутке* (80) *совпадает с разложением своей суммы в ряд Тэйлора.*

Мы вернемся еще к теории степенных рядов в третьем томе при изложении теории функций комплексной переменной.

В качестве примера предлагается вывести из теории степенных рядов разложения функций $\log(1+x)$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\arcsin x$, заметив что,

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x},$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

и исследовать область применимости полученных разложений.

ГЛАВА V

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 15. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИИ

151. Основные понятия. В § 6 главы II, посвященном функциям двух переменных, мы начали с изложения основных понятий, касающихся таких функций. Сейчас мы будем говорить о функциях многих переменных и, кроме того, более подробно остановимся на понятии предела.

Функцию $f(x, y)$ мы считаем определенной или на всей плоскости или в некоторой области. Таким образом, всякой точке (x, y) из этой области соответствует определенное значение $f(x, y)$. Если рассматриваются только внутренние точки области, то такая область называется *открытой*. Если к области причисляется ее контур, то область называется *замкнутой*.

Аналогичным образом, если ввести прямолинейную, прямоугольную систему координат OX, OY, OZ в пространстве, то, вместо тройки чисел (x, y, z) мы можем говорить о точке M пространства с координатами (x, y, z). Будем считать, что функция $f(x, y, z)$ определена во всем пространстве или в некоторой области пространства, которая может быть открытой или замкнутой. В наиболее простых случаях границами области (их может быть и несколько) будут некоторые поверхности. Так, например, неравенства:

$$a_1 \leqslant x \leqslant a_2; \quad b_1 \leqslant y \leqslant b_2; \quad c_1 \leqslant z \leqslant c_2$$

определяют замкнутый прямоугольный параллелепипед, ребра которого параллельны координатным осям. Неравенства:

$$a_1 < x < a_2; \quad b_1 < y < b_2; \quad c_1 < z < c_2$$

определяют открытый параллелепипед. Неравенство

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leqslant r^2$$

определяет замкнутую сферу с центром (a, b, c) и радиусом r. Если исключить знак равенства и оставить только знак $<$, то получится открытая сфера. Понятие предела и непрерывности для функции трех переменных определяют совершенно так же, как и [67] для двух переменных.

Для функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ многих переменных при $n > 3$ уже теряется геометрическая наглядность пространства, однако и в этом случае часто сохраняют геометрическую терминологию. Последовательность n вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называют точкой. Множество всех точек образует n-мерное пространство. Области такого пространства определяются неравенствами. Так, например, неравенства:

$$c_1 \leqslant x_1 \leqslant d_1;\ c_2 \leqslant x_2 \leqslant d_2;\ \ldots;\ c_n \leqslant x_n \leqslant d_n$$

определяют n-мерный параллелепипед или, как иногда говорят, n-мерный промежуток. Неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k)^2 \leqslant r^2$$

определяет n-мерную сферу. *Окрестностью точки* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется множество точек, определенных последним неравенством при некотором выборе r или неравенствами $|x_k - a_k| \leqslant \rho$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, где ρ — некоторое положительное число.

Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена в окрестности точки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то говорят, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ стремится к пределу A при стремлении точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ к точке $M_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, и пишут:

$$\lim_{x_k \to a_k} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A \text{ или } \lim_{M \to M_0} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A,$$

если для любого заданного положительного числа ε существует такое положительное η, что $|A - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)| < \varepsilon$, если только $|a_k - x_k| < \eta$ при $k = 1, 2, \ldots, n$, причем считается, что точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не совпадает с $M_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена и в точке $M_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то непрерывность в этой точке определяется равенством [ср. **67**]:

$$\lim_{x_k \to a_k} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Справедливы указанные в [**67**] свойства функции, непрерывной в замкнутой области.

Как и в случае функции одного переменного [**34**], справедливы утверждения о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций. Последнее — в том случае, когда знаменатель отличен от нуля в точке $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

152. **О предельном переходе.** Остановимся более подробно на понятии предела, ограничиваясь случаем функции двух переменных. Если существует предел

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A, \tag{1}$$

то будем говорить, что *существует предел по обеим переменным.* Как мы знаем [**67**], это значит, что $f(x, y)$ стремится к пределу A при любом законе

стремления точки $M(x, y)$ к $M_0(a, b)$. В частности:

$$\lim_{x \to a} f(x, b) = A \quad \text{и} \quad \lim_{y \to b} f(a, y) = A. \tag{2}$$

В первом случае $M(x, y)$ стремится к $M_0(a, b)$ по прямой, параллельной оси OX, а во втором случае — по прямой, параллельной оси OY. Отметим, что из существования пределов (2) и их равенства еще не вытекает существование предела (1). В качестве примера рассмотрим функцию $f(x, y) = xy:(x^2+y^2)$ и положим $a=0$ и $b=0$. Мы имеем:

$$\lim_{x \to 0} f(x, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot 0}{x^2+0^2} = \lim_{x \to 0} 0 = 0 \text{ и } \lim_{y \to 0} f(0, y) = 0,$$

а предел (1) в этом случае не существует. Действительно, полагая $y:x = \operatorname{tg}\alpha$, можем переписать нашу функцию в виде:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha. \tag{3}$$

Если точка $M(x, y)$ стремится к $M(0, 0)$ по прямой, проходящей через начало и образующей угол α_0 с осью OX, то $f(x, y)$, выражаемая формулой (3), остается постоянной, и ее величина зависит от выбора α_0, откуда и следует, что предел (1) не существует в рассматриваемом примере. Отметим, что формула (3) не определяет функцию в самой точке $M(0, 0)$.

Кроме предельного перехода (1), можно рассматривать еще *повторные пределы*, соответствующие предельному переходу сначала по x при постоянном y, отличном от b, а затем по y, или наоборот:

$$\lim_{x \to a} [\lim_{y \to b} f(x, y)] \quad \text{или} \quad \lim_{y \to b} [\lim_{x \to a} f(x, y)]. \tag{4}$$

Может оказаться, что оба повторных предела существуют, но различны. Так, например, для функции

$$f(x, y) = \frac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

мы имеем, как нетрудно проверить:

$$\lim_{x \to 0} [\lim_{y \to 0} f(x, y)] = 1; \quad \lim_{y \to 0} [\lim_{x \to 0} f(x, y)] = -1.$$

Но имеет место теорема:

Теорема. *Если существует предел по обеим переменным* (1), *и при всяком x, достаточно близком к a и отличном от a, существует предел*

$$\lim_{y \to b} f(x, y) = \varphi(x), \tag{5}$$

то существует первый повторный предел (4) *и он равен A*, т. е.

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = A. \tag{6}$$

Из существования предела (1) следует [67], что для любого заданного положительного ε существует такое положительное η, что

$$|A - f(x, y)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x-a| < \eta \quad \text{и} \quad |y-b| < \eta, \tag{7}$$

причем (x, y) не совпадает с (a, b). Фиксируем x, отличное от a, так, чтобы иметь $|x-a| < \eta$. Принимая во внимание (5) и переходя в неравенстве (7) к пределу, получим:

$$|A - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad |x-a| < \eta \quad \text{и} \quad x \neq a,$$

откуда, ввиду произвольности ε, следует равенство (6).

Замечание. Совершенно так же, если мы предположим, что существует предел (1) и что при всяком y, достаточно близком к b и отличном от b, существует предел

$$\lim_{x \to a} f(x, y) = \psi(y),$$

то существует второй повторный предел (4) и он равен A, т. е.

$$\lim_{y \to b} \psi(y) = A.$$

Если предел (1) существует и равен $f(a, b)$, т. е. $A = f(a, b)$, то функция $f(x, y)$ непрерывна в точке (a, b) или, как говорят, непрерывна по обеим переменным в точке (a, b). При этом, в силу (2):

$$\lim_{x \to a} f(x, b) = f(a, b); \qquad \lim_{y \to b} f(a, y) = f(a, b),$$

т. е. функция непрерывна по каждой переменной в отдельности в точке (a, b), о чем мы говорили и раньше [67]. Наоборот, из непрерывности по каждой переменной еще не вытекает непрерывности по обеим переменным. Действительно, определим функцию формулой (3) вне начала координат и положим $f(0, 0) = 0$. Как мы упоминали выше, мы имеем при этом:

$$\lim_{x \to 0} f(x, 0) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{y \to 0} f(0, y) = 0,$$

т. е. функция непрерывна по каждой переменной в точке $(0, 0)$. Но она не является непрерывной по обеим переменным, ибо, как мы видели, не существует определенного предела $f(x, y)$ при стремлении $M(x, y)$ к $M_0(0, 0)$.

Если $f(x, y)$ имеет в некоторой области, содержащей точку (x, y) внутри себя, частные производные, то, как мы показали [68], имеет место формула:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = f'_x(x + \theta\Delta x, y + \Delta y)\,\Delta x + f'_y(x, y + \theta_1\Delta y)\,\Delta y$$
$$(0 < \theta \text{ и } \theta_1 < 1).$$

Положим, что частные производные ограничены в упомянутой области, т. е. по абсолютной величине не превышают некоторого числа M. При этом написанная формула дает:

$$|f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)| \leqslant M(|\Delta x| + |\Delta y|),$$

и правая часть этого неравенства стремится к нулю при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, откуда следует:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y),$$

т. е. *если $f(x, y)$ имеет внутри некоторой области ограниченные частные производные, то она непрерывна внутри этой области.*

Функция (3) при дополнительном соотношении $f(0, 0) = 0$ равна нулю на всей оси OX и на всей оси OY и в точке $M_0(0, 0)$ она имеет, очевидно, частные производные, равные нулю. В остальных точках она также имеет частные производные:

$$f'_x(x, y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2}; \quad f'_y(x, y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

т. е. указанная выше функция имеет частные производные на всей плоскости. Все же она, как мы видели, не обладает непрерывностью в точке $(0, 0)$. Это объясняется тем, что частные производные могут принимать сколь угодно большие по абсолютной величине значения при приближении точки (x, y) к началу координат.

153. Частные производные и полный дифференциал первого порядка. В [68] мы ввели понятие о частных производных и полном дифференциале функции двух переменных. Эти понятия могут быть распространены и на случай функции любого числа переменных. Для примера рассмотрим функцию четырех переменных:

$$w = f\ (x,\ y,\ z,\ t).$$

Частной производной от этой функции по x называется предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,\ y,\ z,\ t) - f(x,\ y,\ z,\ t)}{h},$$

если он существует, и для обозначения этой частной производной употребляют символы:

$$f'_x(x,\ y,\ z,\ t), \text{ или } \frac{\partial f(x,\ y,\ z,\ t)}{\partial x}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Аналогично определяются частные производные и по другим переменным.

Полным дифференциалом функции называется сумма ее частных дифференциалов:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial t} dt,$$

где $dx,\ dy,\ dz,\ dt$ — дифференциалы независимых переменных (произвольные величины, не зависящие от $x,\ y,\ z,\ t$).

Дифференциал есть главная часть приращения функции:

$$\Delta w = f(x + dx,\ y + dy,\ z + dz,\ t + dt) - f(x,\ y,\ z,\ t),$$

а именно (ср. [68]):

$$\Delta w = dw + \varepsilon_1 dx + \varepsilon_2 dy + \varepsilon_3 dz + \varepsilon_4 dt,$$

где $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4$ стремятся к нулю, если $dx,\ dy,\ dz,\ dt$ стремятся к нулю, причем предполагается, что функция w имеет непрерывные частные производные внутри некоторой области, содержащей точку $(x,\ y,\ z,\ t)$ внутри себя.

Точно так же может быть обобщено и правило дифференцирования сложных функций. Предположим, например, что x, y и z суть не независимые переменные, но функции независимой переменной t. Функция w будет в этом случае зависеть от t как непосредственно, так и через посредство $x,\ y,\ z$, и полная производная от w по t будет иметь выражение:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{8}$$

Мы не останавливаемся на доказательстве этого правила, так как оно состоит в буквальном повторении того, что мы говорили в [69]. Если переменные $x,\ y,\ z$ зависят, кроме t, и от других

независимых переменных, то в правой части формулы (8) мы должны вместо $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ писать частные производные $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$. В этом случае и функция w будет, кроме t, зависеть и от других независимых переменных, и в левой части равенства (8) мы также должны $\frac{dw}{dt}$ заменить на $\frac{\partial w}{\partial t}$. Но эта последняя частная производная отлична от частной производной $\frac{\partial w}{\partial t}$, стоящей в правой части равенства (8) и вычисленной лишь поскольку w непосредственно зависит от t; для отличия эту частную производную, вычисленную непосредственно по t, заключают иногда в скобки, так что равенство (8) принимает в рассматриваемом случае вид:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}. \tag{9}$$

В случае функции от одной переменной, мы видели, что *выражение ее первого дифференциала не зависит от выбора независимой переменной* [**50**]. Покажем, что это *свойство остается справедливым и в случае функции от нескольких переменных.*

Рассмотрим для определенности случай функции от двух переменных:

$$z=\varphi(x,\ y).$$

Положим, что x и y суть функции независимых переменных u и v. Согласно правилу дифференцирования сложных функций, имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Полный дифференциал функции по определению равен

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Подставляя выражения частных производных, получим:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right).$$

Но выражения, стоящие в круглых скобках, суть полные дифференциалы x и y, и мы можем написать:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

т. е. *дифференциал сложной функции имеет то же выражение, которое он имел бы, если бы переменные были независимыми.*

Свойство это позволяет распространить правило нахождения дифференциала суммы, произведения и частного на случай функции от нескольких переменных:

$$d(u+v)=du+dv,\quad d(uv)=v\,du+u\,dv,\quad d\,\frac{u}{v}=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2},$$

где u и v — функции нескольких независимых переменных. Действительно, пользуясь доказанным свойством, мы можем, например, написать:

$$d(uv) = \frac{\partial (uv)}{\partial u} du + \frac{\partial (uv)}{\partial v} dv = v\,du + u\,dv.$$

154. Теорема Эйлера. *Функция любого числа переменных называется однородной функцией этих переменных степени m, если при умножении всех этих переменных на произвольную величину t функция умножается на t^m.*

Ограничиваясь для определенности случаем функции от двух переменных, можем сказать, что функция $f(x, y)$ называется однородной функцией степени m, если она удовлетворяет тождеству:

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y). \tag{10}$$

Положим, например, что функция $f(x, y)$ выражает некоторый объем, что x и y суть длины некоторых линий и что в выражение функции, кроме этих линий, входят лишь отвлеченные числа. Умножение x и y на t равносильно уменьшению масштаба в t раз, и, очевидно, что при этом число, выражающее объем, должно умножиться на t^3, т. е. в рассматриваемом случае $f(x, y)$ будет однородной функцией третьей степени.[1])

Дифференцируя тождество (10) по t и применяя при дифференцировании левой части правило дифференцирования сложных функций, получим тождество:

$$xf'_u(u, v) + yf'_v(u, v) = mt^{m-1} f(x, y),$$

где $u = tx$ и $v = ty$. Полагая в этом тождестве $t = 1$, находим:

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = mf(x, y), \tag{11}$$

что и выражает *теорему Эйлера:*

Сумма произведений частных производных однородной функции на соответствующие переменные равна произведению самой функции на степень ее однородности.

Если $m = 0$, то, положив в тождестве (10) $t = \frac{1}{x}$, мы получим:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

т. е. *однородная функция нулевой степени есть функция отношений всех переменных к одному из них.* Часто однородная функция нулевой степени называется просто *однородной.* Выше мы, естественно, считаем, что функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные при рассматриваемых значениях переменных.

---

[1]) Так, например, объем конуса выражается через радиус его основания r и высоту h по формуле: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

155. Частные производные высших порядков. Частные производные функции от нескольких переменных суть в свою очередь функции тех же переменных, и мы можем определить их частные производные. Таким образом мы получим частные производные второго порядка первоначальной функции, которые также будут функциями тех же переменных, и их дифференцирование приведет к частным производным третьего порядка первоначальной функции, и т. д. Так, например, в случае функции $u = f(x, y)$ от двух переменных, дифференцируя каждую из частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ еще раз по x и y, получим четыре производные второго порядка, которые обозначаются так:

$$f''_{x^2}(x, y),\ f''_{xy}(x, y),\ f''_{yx}(x, y),\ f''_{y^2}(x, y)$$

или

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y},\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\, \partial x},\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2},$$

или, наконец,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Производные $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ отличаются лишь порядком дифференцирования. В первом случае дифференцирование производится сначала по x и потом по y, а во втором случае — в обратном порядке. Покажем, что эти две производные тождественны между собою, т. е. что *результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.*

Составим выражение:

$$\omega = f(x + h,\ y + k) - f(x + h,\ y) - f(x,\ y + k) + f(x, y).$$

Полагая

$$\varphi(x, y) = f(x + h,\ y) - f(x, y),$$

можем написать выражение ω в виде:

$$\omega = [f(x + h,\ y + k) - f(x,\ y + k)] - [f(x + h,\ y) - f(x, y)] = \\ = \varphi(x,\ y + k) - \varphi(x, y).$$

Применяя два раза формулу *Лагранжа* [63], получим:

$$\omega = k\varphi'_y(x,\ y + \theta_1 k) = k\,[f'_y(x + h,\ y + \theta_1 k) - f'_y(x,\ y + \theta_1 k)] = \\ = khf''_{yx}(x + \theta_2 h,\ y + \theta_1 k).$$

Буквы θ с различными значками означают числа, лежащие между 0 и 1. Знаком $f'_y(x + h,\ y + \theta_1 k)$ мы обозначаем частную производную функции $f(x, y)$ по ее второму аргументу y, когда туда вместо x и y подставлены, соответственно, $x + h$ и $y + \theta_1 k$. Аналогичные обозначения применяются и для других частных производных.

Точно так же, полагая:

$$\psi(x, y) = f(x, y+k) - f(x, y),$$

можем написать:

$$\begin{aligned}\omega &= [f(x+h, y+k) - f(x+h, y)] - [f(x, y+k) - f(x, y)] = \\ &= \psi(x+h, y) - \psi(x, y) = h\psi'_x(x+\theta_3 h, y) = \\ &= h[f'_x(x+\theta_3 h, y+k) - f'_x(x+\theta_3 h, y)] = hkf''_{xy}(x+\theta_3 h, y+\theta_4 k).\end{aligned}$$

Сравнивая оба выражения, полученных для ω, будем иметь:

$$hkf''_{yx}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 k) = hkf''_{xy}(x+\theta_3 h, y+\theta_4 k)$$

или

$$f''_{yx}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 k) = f''_{xy}(x+\theta_3 h, y+\theta_4 k).$$

Предполагая непрерывность написанных производных второго порядка и устремляя h и k к нулю, получим:

$$f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y).$$

Это рассуждение приводит к следующей теореме:

Теорема. *Если $f(x, y)$ имеет внутри некоторой области непрерывные производные $f''_{yx}(x, y)$ и $f''_{xy}(x, y)$, то во всех точках внутри упомянутой области указанные производные равны.*

Рассмотрим теперь две производные третьего порядка:

$$f'''_{x^2y}(x, y) \text{ и } f'''_{yx^2}(x, y),$$

отличающиеся лишь порядком дифференцирования. Принимая во внимание, что по доказанному результат *двукратного* дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования, можем написать:

$$\begin{aligned}f'''_{x^2y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f'_x(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f'_x(x, y)}{\partial y\, \partial x} = f'''_{xyx}(x, y) = \\ &= f'''_{yxx}(x, y) = f'''_{yx^2}(x, y),\end{aligned}$$

т. е. и в этом случае результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования. Это свойство без труда обобщается на производные любого порядка и на случай функции любого числа переменных, и мы можем высказать общую теорему: *результат дифференцирования не зависит от порядка, в котором производится дифференцирование.*

Заметим, что при доказательстве мы пользовались не только *существованием производных, но и их непрерывностью внутри некоторой области.*

В дальнейшем мы будем всегда предполагать непрерывность производных, о которых мы будем говорить, и в силу доказанной теоремы для производных высших порядков надо лишь указывать порядок производной n, те переменные, по которым производится дифференцирование, и число дифференцирований.

Так, например, в случае функции $w = f(x, y, z, t)$, пользуются следующим обозначением:

$$\frac{\partial^n f(x, y, z, t)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma \partial t^\delta} \text{ или } \frac{\partial^n w}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma \partial t^\delta} \quad (\alpha + \beta + \gamma + \delta = n),$$

которое показывает, что взята производная n-го порядка, причем дифференцирование произведено α раз по x, β раз по y, γ раз по z и δ раз по t.

156. Дифференциалы высших порядков. Полный дифференциал du функции от нескольких переменных есть в свою очередь функция тех же переменных, и мы можем определить полный дифференциал этой последней функции. Таким образом мы получим дифференциал второго порядка d^2u первоначальной функции u, который также будет функцией тех же переменных, а его полный дифференциал приведет нас к дифференциалу третьего порядка d^3u первоначальной функции и т. д.

Рассмотрим подробнее случай функции $u = f(x, y)$ двух переменных x и y и будем предполагать, что переменные x и y суть независимые переменные. По определению

$$du = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy. \tag{12}$$

При вычислении d^2u будем принимать во внимание, что дифференциалы dx и dy независимых переменных надо рассматривать как величины постоянные, а потому их можно выносить за знак дифференциала:

$$\begin{aligned} d^2u &= d\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx\right] + d\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy\right] = \\ &= dx \cdot d\,\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + dy \cdot d\,\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \\ &= dx \cdot \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y} dy\right] + \\ &\qquad + dy\left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\,\partial x} dx + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} dy\right] = \\ &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} dy^2. \end{aligned}$$

Вычисляя точно так же d^3u, мы получим:

$$\begin{aligned} d^3u = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3} dx^3 &+ 3\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^2\,\partial y} dx^2\,dy + \\ &+ 3\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x\,\partial y^2} dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3} dy^3. \end{aligned}$$

Эти выражения d^2u и d^3u приводят нас к следующей *символической формуле для дифференциала любого порядка:*

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n f, \tag{13}$$

причем формулу эту надо понимать так: сумму, стоящую в круглых скобках, надо возвысить в степень n, применяя формулу бинома Ньютона, после чего показатели степеней у $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ надо считать указателями порядка производных по x и y от функции f.

Мы убедились в справедливости формулы (13) при n, равном 1, 2 и 3. Для полного ее доказательства необходимо применить обычный способ доказательства от n к $(n+1)$. Положим, что формула (13) справедлива при некотором n. Определим дифференциал $(n+1)$-го порядка:

$$d^{n+1}u = d(d^n u) = \frac{\partial (d^n u)}{\partial x} dx + \frac{\partial (d^n u)}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right) d^n u,$$

где символом

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right) \varphi$$

мы обозначаем, вообще:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy.$$

Принимая во внимание, что для $d^n u$ формула (13) считается доказанной, можем написать:

$$d^{n+1}u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n f\right] = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^{n+1} f,$$

т. е. формула доказана и для $d^{n+1}u$.

Формула (13) обобщается без труда и на случай функции любого числа независимых переменных. Формула (13) справедлива, как мы знаем [153], не только в том случае, когда x и y суть независимые переменные. Но при выводе выражения d^2u существенным было считать dx и dy величинами постоянными, и формула (13) справедлива лишь в тех случаях, когда dx и dy могут считаться постоянными.

Это будет справедливо, если x и y суть независимые переменные. Положим теперь, что x и y суть линейные функции независимых переменных z и t:

$$x = az + bt + c, \quad y = a_1 z + b_1 t + c_1,$$

где коэффициенты и свободные члены — постоянные. Для dx и dy получим выражения:

$$dx = a\,dz + b\,dt, \quad dy = a_1\,dz + b_1\,dt.$$

Но dz и dt, как дифференциалы независимых переменных, должны считаться постоянными; то же можно сказать, следовательно, в этом случае и относительно dx и dy; мы можем поэтому утверждать,

что *символическая формула* (13) *справедлива как в случае, когда x и y суть независимые переменные, так и в том случае, когда они суть линейные функции (целые многочлены первой степени) независимых переменных.*

Если dx и dy нельзя считать постоянными, то формула (13) уже не будет справедливой. Разберем выражение d^2u в этом общем случае. При вычислении

$$d\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}dx\right) \quad \text{и} \quad d\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dy\right)$$

мы уже не имеем права выносить dx и dy за знак дифференциала, как это делали выше, но должны применять формулу для дифференциала произведения [153].

Мы получим, таким образом:

$$d^2u = dx\, d\,\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + dy\, d\,\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} d^2x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} d^2y.$$

Сумма первых двух слагаемых в правой части этого равенства даст нам выражение, которое мы имели выше для d^2u, и окончательно получим:

$$d^2u = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} dy^2 + \\ + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} d^2x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} d^2y, \tag{14}$$

т. е. в рассматриваемом общем случае выражение для d^2u будет содержать добавочные слагаемые, зависящие от d^2x и d^2y.

157. Неявные функции. Укажем сейчас правила дифференцирования функций, заданных неявно. При этом мы будем предполагать, что написанные уравнения действительно определяют некоторую функцию, имеющую соответствующие производные. В [159] при некоторых условиях мы докажем это. Если y есть неявная функция от x:

$$F(x, y) = 0, \tag{15}$$

то первая производная y' этой функции определяется, как мы знаем, из уравнения [69]:

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)y' = 0. \tag{16}$$

Уравнение (16) мы получали, предполагая в равенстве (15) y функцией от x и дифференцируя обе части этого тождества по x. Поступая так же с (16), получим уравнение для определения второй производной y'':

$$F''_{x^2}(x, y) + 2F''_{xy}(x, y)y' + F''_{y^2}(x, y)y'^2 + F'_y(x, y)y'' = 0. \tag{17}$$

Дифференцируя еще раз по x, получим уравнение для определения третьей производной y''' и т. д.

Обратим внимание на то, что в получаемых таким образом уравнениях коэффициент при искомых производных неявной функции будет один и тот же, а именно $F'_y(x, y)$, и потому, если при некоторых значениях x и y, удовлетворяющих уравнению (15), этот коэффициент отличен от нуля, то при этих значениях указанный выше прием даст вполне определенные значения для производных любого порядка неявной функции. При этом, конечно, предполагается существование частных производных от левой части уравнения (15).

Рассмотрим уравнение с тремя переменными:

$$\Phi(x, y, z) = 0.$$

Такое уравнение определяет z как неявную функцию от независимых переменных x и y, и если заменить в левой части этого уравнения z именно этой функцией от x и y, то левая часть уравнения станет равна тождественно нулю. Таким образом, дифференцируя левую часть этого уравнения по независимым переменным x и y в предположении, что z есть функция от них, мы должны получить нуль:

$$\Phi'_x(x, y, z) + \Phi'_z(x, y, z) z'_x = 0,$$
$$\Phi'_y(x, y, z) + \Phi'_z(x, y, z) z'_y = 0.$$

Из этих уравнений определятся частные производные первого порядка z'_x и z'_y. Дифференцируя первое из написанных соотношений еще раз по x, получим уравнение для определения частной производной z''_{x^2} и т. д. Во всех получаемых уравнениях коэффициент при искомой производной будет $\Phi'_z(x, y, z)$. Рассмотрим теперь систему уравнений:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0.$$

Будем считать, что эта система определяет y и z как неявные функции от x. Дифференцируя оба уравнения системы по x в предположении, что y и z суть функции от x, получим систему уравнений первой степени для определения производных y' и z' от y и z по x:

$$\varphi'_x(x, y, z) + \varphi'_y(x, y, z) \cdot y' + \varphi'_z(x, y, z) \cdot z' = 0,$$
$$\psi'_x(x, y, z) + \psi'_y(x, y, z) \cdot y' + \psi'_z(x, y, z) \cdot z' = 0.$$

Дифференцируя эти соотношения еще раз по x, получим систему уравнений для определения вторых производных y'' и z''. Дифференцируя еще раз по x, получим систему уравнений для определения y''' и z''' и т. д.

Производные n-го порядка $y^{(n)}$ и $z^{(n)}$ будут при этом определяться из системы вида:

$$\begin{aligned} \varphi'_y(x, y, z) \cdot y^{(n)} + \varphi'_z(x, y, z) \cdot z^{(n)} + A = 0, \\ \psi'_y(x, y, z) \cdot y^{(n)} + \psi'_z(x, y, z) \cdot z^{(n)} + B = 0, \end{aligned} \qquad (17_1)$$

где A и B — выражения, содержащие производные порядка ниже n. Такая система, как это известно из элементарной алгебры, будет давать одно определенное решение, если выполнено условие:

$$\varphi'_y(x, y, z) \cdot \psi'_z(x, y, z) - \varphi'_z(x, y, z) \cdot \psi'_y(x, y, z) \neq 0.$$

При всех тех значениях x, y и z, удовлетворяющих системе (17_1), при которых это условие выполнено, описанный выше прием приведет к вполне определенным значениям производных.

Если имеется система m уравнений с $(m+n)$ переменными, то такая система определяет, вообще говоря, m переменных как неявные функции остальных n переменных, и производные этих неявных функций могут быть получены указанным выше приемом последовательного дифференцирования уравнений по независимым переменным.

158. Пример. Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, \qquad (18)$$

которое определяет z как функцию от x и y. Дифференцируя по x, получим:

$$ax + cz \cdot z'_x = 0, \qquad (19)$$

и точно так же, дифференцируя по y, получим:

$$by + cz \cdot z'_y = 0, \qquad (19_1)$$

откуда

$$z'_x = -\frac{ax}{cz}, \quad z'_y = -\frac{by}{cz}.$$

Дифференцируя соотношение (19) по x и по y, а соотношение (19_1) по y, получим:

$$a + cz'^2_x + cz\, z''_{x^2} = 0, \quad cz'_x z'_y + cz\, z''_{yx} = 0, \quad b + cz'^2_y + cz\, z''_{y^2} = 0,$$

откуда:

$$z''_{x^2} = -\frac{a + cz'^2_x}{cz} = -\frac{a + c\dfrac{a^2x^2}{c^2z^2}}{cz} = -\frac{acz^2 + a^2x^2}{c^2z^3},$$

$$z''_{xy} = -\frac{z'_x z'_y}{z} = -\frac{abxy}{c^2z^3},$$

$$z''_{y^2} = -\frac{b + cz'^2_y}{cz} = -\frac{bcz^2 + b^2y^2}{c^2z^3}.$$

Покажем теперь другой способ вычисления частных производных, основанный на применении выражения полного дифференциала функции. Докажем предварительно вспомогательную теорему. Пусть нам удалось каким-нибудь

образом получить выражение полного дифференциала dz функции двух независимых переменных x и y в виде:

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

С другой стороны, мы знаем, что

$$dz = z'_x\,dx + z'_y\,dy.$$

Сравнивая эти два выражения, получим:

$$p\,dx + q\,dy = z'_x\,dx + z'_y\,dy.$$

Но dx и dy, как дифференциалы независимых переменных, суть величины произвольные. Полагая $dx = 1$ и $dy = 0$ или $dx = 0$ и $dy = 1$, получим:

$$p = z'_x \quad \text{и} \quad q = z'_y.$$

Итак, *если полный дифференциал функции z двух независимых переменных x и y может быть представлен в виде:*

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

то $p = z'_x$ и $q = z'_y$.

Теорема эта справедлива и для функции любого числа независимых переменных. Совершенно так же можно показать, что *если дифференциал второго порядка может быть представлен в виде:*

$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2,$$

то $r = z''_{x^2}$, $s = z''_{xy}$ и $t = z''_{y^2}$.

Вернемся теперь к рассмотренному примеру. Вместо того, чтобы определять производные левой части соотношения (18) по x и y, определим ее дифференциал, помня, что выражение первого дифференциала не зависит от выбора независимых переменных [153]:

$$ax\,dx + by\,dy + cz\,dz = 0, \tag{20}$$

откуда

$$dz = -\frac{ax}{cz}\,dx - \frac{by}{cz}\,dy,$$

и, следовательно, в силу доказанной теоремы:

$$z'_x = -\frac{ax}{cz} \quad \text{и} \quad z'_y = -\frac{by}{cz}.$$

Определим теперь дифференциал левой части соотношения (20), принимая во внимание, что dx и dy должны считаться при этом постоянными:

$$a\,dx^2 + b\,dy^2 + c\,dz^2 + cz\,d^2z = 0$$

или

$$d^2z = -\frac{a}{cz}\,dx^2 - \frac{b}{cz}\,dy^2 - \frac{1}{z}\,dz^2 = -\frac{a}{cz}\,dx^2 - \frac{b}{cz}\,dy^2 - \frac{1}{z}\left(\frac{ax}{cz}\,dx + \frac{by}{cz}\,dy\right)^2 =$$
$$= -\frac{acz^2 + a^2x^2}{c^2z^3}\,dx^2 - 2\frac{abxy}{c^2z^3}\,dx\,dy - \frac{bcz^2 + b^2y^2}{c^2z^3}\,dy^2,$$

и, следовательно:

$$z''_{x^2} = -\frac{acz^2 + a^2x^2}{c^2z^3}, \quad z''_{xy} = -\frac{abxy}{c^2z^3}, \quad z''_{y^2} = -\frac{bcz^2 + b^2y^2}{c^2z^3}.$$

Таким образом, определив дифференциал некоторого порядка, мы получим все частные производные соответствующего порядка.

159. Существование неявных функций. Наши рассуждения носили формальный характер. Мы предполагали во всех случаях, что соответствующее уравнение или система уравнений определяют неявным образом некоторую функцию, имеющую производную. Сейчас докажем основную теорему существования неявных функций.

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0 \tag{21}$$

и укажем те условия, при которых оно определяет единственным образом y как функцию от x, непрерывную и имеющую производную.

Теорема. *Пусть $x = x_0$ и $y = y_0$ — решение уравнения* (21), т. е.

$$F(x_0, y_0) = 0; \tag{22}$$

пусть $F(x, y)$ и ее частные производные первого порядка по x и y — непрерывные функции при всех x и y, достаточно близких к x_0 и y_0, *и пусть, наконец, частная производная $F'_y(x, y)$ отлична от нуля при $x = x_0$, $y = y_0$. При этом существует при всех x, достаточно близких к x_0, одна определенная функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнению* (21), *непрерывная, имеющая производную и удовлетворяющая условию: $y(x_0) = y_0$.*

Положим для определенности, что $F'_y(x, y) > 0$ при $x = x_0$, $y = y_0$. Так как по условию эта производная непрерывна, то она будет положительной и при всех значениях x и y, достаточно близких к x_0 и y_0, т. е. существует такое положительное число l, что $F(x, y)$ и ее частные производные непрерывны и

$$F'_y(x, y) > 0 \tag{23}$$

при всех x и y, удовлетворяющих условию:

$$|x - x_0| \leqslant l, \quad |y - y_0| \leqslant l. \tag{24}$$

Далее, функция $F(x_0, y)$ одной переменной y обращается в нуль при $y = y_0$, в силу (22), и есть возрастающая функция от y в промежутке $(y_0 - l, y_0 + l)$, в силу (23) и (24). Таким образом, числа $F(x_0, y_0 - l)$ и $F(x_0, y_0 + l)$ будут разных знаков: первое — отрицательное, а второе — положительное. Принимая во внимание непрерывность функции $F(x, y)$, мы можем утверждать [67], что $F(x, y_0 - l)$ будет отрицательным, а $F(x, y_0 + l)$ — положительным при всех x, достаточно близких к x_0, т. е. существует такое положительное число l_1, что

$$F(x, y_0 - l) < 0 \quad \text{и} \quad F(x, y_0 + l) > 0 \tag{25}$$

при $|x - x_0| \leqslant l_1$. Обозначим через m наименьшее из двух чисел: l и l_1. Принимая во внимание (24) и (25), мы можем утверждать, что выполнены неравенства (23) и (25), если x и y удовлетворяют неравенствам:

$$|x - x_0| \leqslant m, \quad |y - y_0| \leqslant l. \tag{26}$$

Если возьмем какое-нибудь определенное x, лежащее в промежутке $(x_0 - m, x_0 + m)$, т. е. удовлетворяющее первому из неравенств (26), то $F(x, y)$, как функция от y, будет в силу (23) возрастающей функцией в промежутке $(y_0 - l, y_0 + l)$, и, в силу (25), будет разных знаков на концах этого промежутка. Следовательно, она будет обращаться в нуль при одном определенном значении y из этого промежутка. В частности, если $x = x_0$, то, в силу (22), это значение y будет $y = y_0$. Мы доказали, таким образом, существование в промежутке $(x_0 - m, x_0 + m)$ определенной функции $y(x)$, являющейся решением уравнения (21) и удовлетворяющей условию $y(x_0) = y_0$. Иначе

говоря, из предыдущих рассуждений следует, что, при всяком фиксированном x из промежутка $(x_0 - m, x_0 + m)$, уравнение (21) имеет единственный корень, лежащий внутри промежутка $(y_0 - l, y_0 + l)$.

Покажем теперь, что найденная функция $y(x)$ будет непрерывной при $x = x_0$. Действительно, при любом заданном малом положительном ε числа $F(x_0, y_0 - \varepsilon)$ и $F(x_0, y_0 + \varepsilon)$ будут, в силу (25), разных знаков, а следовательно, будет существовать такое положительное η, что $F(x, y_0 - \varepsilon)$ и $F(x, y_0 + \varepsilon)$ — разных знаков, если только $|x - x_0| < \eta$, т. е., иначе говоря, при $|x - x_0| < \eta$ корень уравнения (21), т. е. значение найденной функции $y(x)$, удовлетворяет условию $|y - y_0| < \varepsilon$, что и доказывает непрерывность $y(x)$ при $x = x_0$.

Покажем теперь существование производной $y'(x)$ при $x = x_0$. Пусть $\Delta x = x - x_0$ и пусть $\Delta y = y - y_0$ есть соответствующее приращение y. Следовательно, $x = x_0 + \Delta x$ и $y = y_0 + \Delta y$ удовлетворяют уравнению (21), т. е. $F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0$, и в силу (22) можем написать:

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = 0.$$

Принимая во внимание непрерывность частных производных, можем переписать это равенство так [68]:

$$[F'_{x_0}(x_0, y_0) + \varepsilon_1]\,\Delta x + [F'_{y_0}(x_0, y_0) + \varepsilon_2]\,\Delta y = 0, \tag{27}$$

где ε_1 и $\varepsilon_2 \to 0$, если Δx и $\Delta y \to 0$, и где мы обозначили через $F'_{x_0}(x_0, y_0)$ и $F'_{y_0}(x_0, y_0)$ значения частных производных при $x = x_0$, $y = y_0$. Из доказанной выше непрерывности следует, что $\Delta y \to 0$, если $\Delta x \to 0$.

Уравнение (27) дает нам:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_{x_0}(x_0, y_0) + \varepsilon_1}{F'_{y_0}(x_0, y_0) + \varepsilon_2};$$

переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим:

$$y'(x_0) = -\frac{F'_{x_0}(x_0, y_0)}{F'_{y_0}(x_0, y_0)}.$$

Мы доказали непрерывность и существование производной функции $y(x)$ только при $x = x_0$. Если мы возьмем какое-либо другое значение x из промежутка $(x_0 - m, x_0 + m)$ и соответствующее значение y из промежутка $(y_0 - l, y_0 + l)$, являющееся корнем уравнения (21), то для этой пары значений x, y опять выполнены все условия нашей теоремы, и в силу доказанного $y(x)$ будет непрерывной и будет иметь производную при взятом значении x из упомянутого промежутка.

Совершенно так же, как и выше, формулируется и доказывается теорема о существовании неявной функции $z(x, y)$, определяемой уравнением:

$$\Phi(x, y, z) = 0.$$

Рассмотрим теперь систему:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0, \tag{28}$$

определяющую y и z как функции от x.

Для этого случая имеет место теорема:

Теорема. *Пусть $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ — решение системы (28), пусть $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ и их частные производные первого порядка — непрерывные функции (x, y, z) при всех значениях этих переменных, достаточно близких к (x_0, y_0, z_0), и пусть выражение:*

$$\varphi'_y(x, y, z)\,\psi'_z(x, y, z) - \varphi'_z(x, y, z)\,\psi'_y(x, y, z)$$

отлично от нуля при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. При этом существует при всех значениях x, достаточно близких к x_0, одна определенная система двух функций $y(x)$, $z(x)$, удовлетворяющих уравнениям (28), *непрерывных, имеющих производные первого порядка и удовлетворяющих условию: $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$.*

На доказательстве этой теоремы мы останавливаться не будем. В третьем томе мы рассмотрим общий случай любого числа функций с любым числом переменных.

160. Кривые в пространстве и поверхности. Как известно из аналитической геометрии, всякому уравнению с тремя переменными

$$F(x, y, z) = 0, \tag{29}$$

или в явной форме

$$z = f(x, y), \tag{30}$$

соответствует, вообще говоря, некоторая поверхность в пространстве, отнесенном к прямоугольным осям OX, OY, OZ.

Линия в пространстве может быть рассматриваема, как пересечение некоторых двух поверхностей, и может быть, следовательно, определена совокупностью двух уравнений:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0. \tag{31}$$

Иначе кривую можно определить в параметрической форме уравнениями:

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t), \; z = \omega(t). \tag{32}$$

Длина дуги кривой, как и в случае плоской кривой, определяется как предел периметров ломаных линий, вписанных в эту дугу, при беспредельном уменьшении каждой из сторон этой ломаной. Рассуждения, которые мы не будем приводить, так как они совершенно аналогичны рассуждениям [103] в случае плоской кривой, показывают, что длина дуги выражается определенным интегралом:

$$s = \int_{(M_1)}^{(M_2)} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)}\, dt, \tag{33}$$

где t_1 и t_2 суть значения параметра t, соответствующие концам M_1 и M_2 дуги, и дифференциал дуги имеет выражение:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}. \tag{34}$$

Если роль параметра t играет длина дуги s кривой, отсчитываемая от некоторой определенной точки ее, то совершенно так же, как это мы делали в случае плоской кривой [70], можно показать, что производные $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ равны направляющим косинусам касательной к кривой, т. е. равны косинусам углов, образованных положительным направлением этой касательной с осями координат. Таким

образом, *направляющие косинусы касательной к кривой в точке* (x, y, z) *кривой*, т. е. *косинусы углов, образованных направлением касательной с осями координат, пропорциональны* dx, dy и dz, и уравнение этой касательной может быть написано в виде:

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}, \tag{35}$$

или

$$\frac{X-\varphi(t)}{\varphi'(t)}=\frac{Y-\psi(t)}{\psi'(t)}=\frac{Z-\omega(t)}{\omega'(t)}. \tag{36}$$

Введем теперь новое понятие, а именно понятие *касательной плоскости к поверхности*

$$F(x, y, z)=0. \tag{37}$$

Пусть $M(x, y, z)$ — некоторая точка поверхности и L — линия, проведенная на поверхности через точку M. Координаты точек этой линии суть функции некоторого параметра t, и функции эти удовлетворяют уравнению (37), так как линия L лежит на поверхности. Таким образом, уравнение (37) удовлетворяется вдоль всей линии L, т. е. при всех значениях t, и мы в этом случае можем написать, беря дифференциал левой части уравнения (37):

$$F'_x(x, y, z)\,dx+F'_y(x, y, z)\,dy+F'_z(x, y, z)\,dz=0. \tag{38}$$

Мы считаем, что $F(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные F'_x, F'_y, F'_z, из которых по крайней мере одна отлична от нуля.

Но, как известно из аналитической геометрии, равенство вида

$$aa_1+bb_1+cc_1=0$$

есть условие перпендикулярности двух направлений, у одного из которых направляющие косинусы пропорциональны числам a, b, c, а у другого — числам a_1, b_1, c_1. Но, как мы видели, dx, dy, dz пропорциональны направляющим косинусам касательной к линии L в точке M, и равенство (38) показывает нам, что касательная к линии L в точке M перпендикулярна к некоторому определенному, не зависящему от линии L направлению, у которого направляющие косинусы пропорциональны $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$. Мы видим, таким образом, что *касательные ко всем линиям, лежащим на поверхности* (37) *и проходящим через точку* M, *лежат в одной и той же плоскости*

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0, \tag{39}$$

которая называется касательной плоскостью к поверхности в точке M.

Коэффициенты A, B, C в уравнении плоскости, как известно из аналитической геометрии, пропорциональны направляющим косинусам нормали к этой плоскости, т. е. в данном случае пропорцио-

нальны $F'_x(x, y, z)$. $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$, и, следовательно, уравнение касательной плоскости окончательно может быть написано в виде:

$$F'_x(x, y, z)(X-x)+F'_y(x, y, z)(Y-y)+ \\ +F'_z(x, y, z)(Z-z)=0, \quad (40)$$

где X, Y, Z — текущие координаты касательной плоскости, а x, y, z — координаты точки касания M.

Нормаль к касательной плоскости, проходящая через точку касания M, называется нормалью к поверхности. Ее направляющие косинусы пропорциональны, как мы сейчас видели, частным производным $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$, и уравнение ее, следовательно, будет:

$$\frac{X-x}{F'_x(x, y, z)}=\frac{Y-y}{F'_y(x, y, z)}=\frac{Z-z}{F'_z(x, y, z)}. \quad (41)$$

Если поверхность задана уравнением в явной форме: $z=f(x, y)$, то уравнение (37) будет иметь вид:

$$F(x, y, z)=f(x, y)-z=0,$$

и, следовательно:

$$F'_x(x, y, z)=f'_x(x, y), \quad F'_y(x, y, z)=f'_y(x, y), \quad F'_z(x, y, z)=-1.$$

Обозначая, как это обыкновенно делается, частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ буквами p и q, получим уравнение касательной плоскости:

$$p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0 \quad (42)$$

и нормали к поверхности:

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}. \quad (43)$$

Для эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

уравнение касательной плоскости в некоторой его точке (x, y, z) будет:

$$\frac{2x}{a^2}(X-x)+\frac{2y}{b^2}(Y-y)+\frac{2z}{c^2}(Z-z)=0$$

или

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}.$$

Правая часть этого уравнения равна просто единице, так как координаты (x, y, z) точки касания должны удовлетворять уравнению эллипсоида, и окончательно уравнение касательной плоскости будет:

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1.$$

§ 16. ФОРМУЛА ТЭЙЛОРА. МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ ФУНКЦИИ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

161. Распространение формулы Тэйлора на случай функции от нескольких независимых переменных. Для простоты письма ограничимся случаем функции $f(x, y)$ от двух независимых переменных. *Формула Тэйлора* дает разложение $f(a+h, b+k)$ по степеням h и k приращений независимых переменных [127]. Введем новую независимую переменную t, полагая:

$$x = a + ht, \quad y = b + kt. \tag{1}$$

Мы получим, таким образом, функцию одной независимой переменной t:

$$\varphi(t) = f(x, y) = f(a + ht, b + kt),$$

причем

$$\varphi(0) = f(a, b) \quad \text{и} \quad \varphi(1) = f(a + h, b + k). \tag{2}$$

Пользуясь формулой Маклорена с остаточным членом Лагранжа, можем написать [127]:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1). \tag{3}$$

Выразим теперь производные $\varphi^{(p)}(0)$ и $\varphi^{(n+1)}(\theta)$ через функцию $f(x, y)$.

Из формулы (1) мы видим, что x и y суть линейные функции независимой переменной t и

$$dx = h\,dt, \quad dy = k\,dt.$$

Мы можем поэтому пользоваться символической формулой при определении дифференциала любого порядка функции $\varphi(t)$ [156]:

$$d^p\varphi(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(p)} f(x, y) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(p)} f(x, y)\,dt^p,$$

откуда

$$\varphi^{(p)}(t) = \frac{d^p\varphi(t)}{dt^p} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(p)} f(x, y).$$

При $t = 0$ имеем $x = a$ и $y = b$, при $t = \theta$ имеем $x = a + \theta h$ и $y = b + \theta k$, а потому:

$$\varphi^{(p)}(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(p)} f(a, b),$$

$$\varphi^{(n+1)}(\theta) = \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(n+1)} f(a + \theta h, b + \theta k).$$

Подставляя эти выражения в формулу (3) и пользуясь еще формулами (2), получим окончательно формулу Тэйлора:

$$f(a+h,\ b+k)=f(a,\ b)+\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)f(a,\ b)+ \\ +\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(2)}f(a,\ b)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(n)}f(a,\ b)+ \\ +\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(n+1)}f(a+\theta h,\ b+\theta k). \qquad (4)$$

Заменяя в этой формуле a на x, b на y и обозначая приращения h и k независимых переменных через dx и dy, а приращение функции, т. е. $f(x+dx,\ y+dy)-f(x,\ y)$, через $\Delta f(x,\ y)$, можем написать формулу в следующем виде:

$$\Delta f(x,\ y)=df(x,\ y)+\frac{d^2f(x,\ y)}{2!}+\ldots+\frac{d^nf(x,\ y)}{n!}+\left[\frac{d^{n+1}f(x,\ y)}{(n+1)!}\right]_{\substack{x+\theta dx\\ y+\theta dy}}.$$

Правая часть этой формулы содержит дифференциалы различных порядков функции $f(x,\ y)$, а в последнем члене указаны те значения независимых переменных, которые надо подставить в производные $(n+1)$-го порядка, входящие в этот член. Аналогично случаю функции от одной независимой переменной формула Маклорена, дающая разложение функции $f(x,\ y)$ по степеням x, y, выводится из формулы Тэйлора (4), если положить там:

$$a=0,\quad b=0;\quad h=x,\quad k=y.$$

При выводе формулы (4) мы предполагали, что функция $f(x,\ y)$ имеет непрерывные частные производные до порядка $(n+1)$ в некоторой открытой области, содержащей отрезок прямой, соединяющей точки $(a,\ b)$ и $(a+h,\ b+k)$. При изменении t от нуля до единицы, переменная точка $x=a+ht$, $y=b+kt$ описывает упомянутый отрезок. При $n=0$ получаем формулу конечных приращений:

$$f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)=hf'_a(a+\theta h,\ b+\theta k)+kf'_b(a+\theta h,\ b+\theta k).$$

Отсюда, как и в [63], непосредственно следует, что *если внутри некоторой области частные производные первого порядка равны везде нулю, то функция сохраняет внутри упомянутой области постоянное значение.*

162. Необходимые условия максимума и минимума функции. Пусть функция $f(x,\ y)$ непрерывна в точке $(a,\ b)$ и некоторой ее окрестности. Аналогично случаю одной независимой переменной мы будем говорить, что *функция $f(x,\ y)$ двух независимых переменных достигает максимума в точке* $(a,\ b)$, *если значение* $f(a,\ b)$ *не меньше всех смежных значений функции*, т. е. *если*

$$\Delta f=f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)\leqslant 0, \qquad (5)$$

при всех h и k достаточно малых по абсолютной величине.

Точно так же мы будем говорить, что *функция* $f(x, y)$ *достигает минимума при* $x = a$ и $y = b$, если

$$\Delta f = f(a + h,\ b + k) - f(a,\ b) \geqslant 0 \qquad (5_1)$$

при всех значениях h и k *достаточно малых по абсолютной величине.*

Итак, пусть $x = a$, $y = b$ — значения независимых переменных, при которых функция $f(x, y)$ достигает максимума или минимума. Рассмотрим функцию $f(x, b)$ одной независимой переменной x. По условию она должна достигать максимума или минимума при $x = a$, а потому ее производная по x при $x = a$ должна или обращаться в нуль или же не существовать [58]. Таким же рассуждением убедимся, что и производная функция $f(a, y)$ по y должна или обращаться в нуль или не существовать при $y = b$. Мы приходим, таким образом, к следующему необходимому условию существования максимума или минимума: *функция* $f(x, y)$ *двух независимых переменных может достигать максимума или минимума лишь при тех значениях* x *и* y, *при которых частные производные первого порядка* $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ *обращаются в нуль или не существуют.*

Совершенно так же, меняя только x или только y, мы можем, пользуясь сказанным в [58], утверждать, что при наличии производных второго порядка необходимым условием максимума являются неравенства $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \leqslant 0$ и $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \leqslant 0$, а необходимым условием минимума — неравенства $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \geqslant 0$ и $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \geqslant 0$.

Предыдущие рассуждения остаются в силе и в случае функции любого числа независимых переменных. Мы можем высказать, таким образом, следующее общее правило:

Функция нескольких независимых переменных может достигать максимума или минимума лишь при тех значениях независимых переменных, при которых частные производные первого порядка обращаются в нуль или не существуют. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением того случая, когда указанные частные производные существуют.

Дифференциал первого порядка равен сумме произведений частных производных по независимым переменным на дифференциалы соответствующих независимых переменных [153], и мы можем поэтому утверждать, что *при значениях независимых переменных, при которых функция имеет максимум или минимум, ее дифференциал первого порядка должен обращаться в нуль.* Эта форма необходимого условия удобна, потому что выражения первого дифференциала не зависят от выбора переменных [153]. Приравнивая нулю частные производные первого порядка, мы получаем систему уравнений, откуда определяются те значения независимых переменных, при которых функция может достигать максимума или минимума. Для полного решения

вопроса необходимо еще произвести исследование полученных значений для того, чтобы решить, достигает ли функция, действительно, при этих значениях независимых переменных максимума или минимума, а если достигает, то чего именно — максимума или минимума. В следующем номере мы покажем, как производится это исследование в случаях функции двух независимых переменных.

163. Исследование максимума и минимума функции двух независимых переменных. Пусть система уравнений

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}=0, \tag{6}$$

выражающая необходимое условие максимума или минимума, дала нам значения $x=a$ и $y=b$, которые надо исследовать. Предположим, что $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка в точке (a, b) и некоторой ее окрестности.

Согласно формуле Тэйлора (4), при $n=2$ можем написать:

$$f(a+h, b+k)=f(a, b)+\frac{\partial f(a, b)}{\partial a}h+\frac{\partial f(a, b)}{\partial b}k+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y}hk+\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}k^2\right]_{\substack{x=a+\theta h\\ y=b+\theta k}}.$$

Принимая во внимание, что $x=a$ и $y=b$ являются решением системы (6), можем переписать это равенство так:

$$\Delta f=f(a+h, b+k)-f(a, b)=$$
$$=\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y}hk+\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}k^2\right]_{\substack{x=a+\theta h\\ y=b+\theta k}}. \tag{7}$$

Положим:

$$r=\sqrt{h^2+k^2}, \quad h=r\cos\alpha, \quad k=r\sin\alpha.$$

При малых по абсолютному значению h и k, и r будет мало, и наоборот, и условия h и $k\to 0$, с одной стороны, и $r\to 0$, с другой — между собой равносильны.

Формула (7) примет вид:

$$\Delta f=\frac{r^2}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}\cos^2\alpha+2\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha\sin\alpha+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}\sin^2\alpha\right]_{\substack{x=a+\theta h\\ y=b+\theta k}}. \tag{8}$$

Принимая во внимание непрерывность производных второго порядка и считая h и k или, что то же, r бесконечно малыми, можем утверждать, что производные в правой части формулы (8), вычисленные при значениях $a+\theta h$, $b+\theta k$, бесконечно мало отличающихся от a, b, сами бесконечно мало отличаются от чисел:

$$\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial a^2}=A, \quad \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial a\,\partial b}=B, \quad \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial b^2}=C,$$

а потому коэффициенты при $\cos^2\alpha$, $\cos\alpha\ \sin\alpha$, $\sin^2\alpha$ в квадратной скобке формулы (8) можно заменить соответственно на

$$A+\varepsilon_1,\quad 2B+\varepsilon_2,\quad C+\varepsilon_3,$$

где ε_1, ε_2, ε_3 суть величины, бесконечно малые одновременно с h и k (или с r).

Формулу (8) можно после этого переписать так:

$$\Delta f=\frac{r^2}{2!}\left[A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha+\varepsilon\right], \tag{9}$$

где

$$\varepsilon=\varepsilon_1\cos^2\alpha+2\varepsilon_2\cos\alpha\sin\alpha+\varepsilon_3\sin^2\alpha$$

есть величина, бесконечно малая одновременно с h и k (или с r).

Из определения максимума и минимума следует, что если правая часть равенства (9) при всех достаточно малых значениях r сохраняет знак (—), то значениям $x=a$ и $y=b$ соответствует максимум функции $f(x, y)$; если она сохраняет знак (+), то указанным значениям будет соответствовать минимум функции; если же, наконец, при сколь угодно малых значениях r правая часть равенства (9) может иметь как знак (+), так и знак (—), то значениям $x=a$ и $y=b$ не соответствуют ни максимум, ни минимум функции.

При исследовании знака правой части равенства (9) могут представиться следующие четыре случая:

I. Если трехчлен

$$A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha \tag{10}$$

не обращается в нуль ни при одном значении α, то как непрерывная функция от α он сохраняет неизменный знак [55]. Пусть это будет знак (+). В промежутке $(0, 2\pi)$ эта непрерывная функция достигает своего наименьшего (положительного) значения m. В силу периодичности $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ это же наименьшее значение m будет иметь место и для любых значений α. Величина $|\varepsilon|$ при всех достаточно малых значениях r меньше m, и при этом знак правой части равенства (9) определяется знаком трехчлена (10), т. е. будет (+); в этом случае мы будем иметь минимум.

II. Положим теперь, что трехчлен (10), не обращаясь ни при каких значениях α в нуль, сохраняет знак (—). Пусть $-m$ наибольшее (отрицательное) значение этого трехчлена в промежутке $(0, 2\pi)$ изменения α. Величина $|\varepsilon|$ при достаточно малых значениях r меньше m и при этом знак правой части равенства (9) будет постоянно (—), т. е. в этом случае мы будем иметь максимум.

III. Положим теперь, что трехчлен (10) меняет знак. Пусть при $\alpha=\alpha_1$ он равен положительному числу $+m_1$, а при $\alpha=\alpha_2$ — отрицательному числу $-m_2$. При всех достаточно малых значениях r $|\varepsilon|$ будет меньше m_1 и m_2, при таких значениях r и при $\alpha=\alpha_1$ или α_2 знак правой части равенства (9) будет определяться знаком

трехчлена (10), т. е. будет (+) при $\alpha=\alpha_1$ и (—) при $\alpha=\alpha_2$. Таким образом, в рассматриваемом случае знак правой части равенства (9) может быть и (+) и (—) при сколь угодно малых значениях r, т. е. в этом случае мы не будем иметь ни максимума, ни минимума.

IV. Положим, наконец, что трехчлен (10), сохраняя неизменный знак, может обращаться в нуль при некоторых значениях α. В этом случае без дальнейшего исследования знака ε мы не можем сделать никаких заключений о знаке правой части равенства (9), и этот случай остается сомнительным в нашем исследовании.

Итак, все свелось к исследованию знака трехчлена (10) при изменении α, и мы укажем простые признаки, позволяющие судить, с каким из указанных четырех случаев мы имеем дело.

1. Положим сначала, что $A\neq 0$. Трехчлен (10) мы можем представить в виде:

$$\frac{(A\cos\alpha+B\sin\alpha)^2+(AC-B^2)\sin^2\alpha}{A}. \tag{11}$$

Если $AC-B^2>0$, то числитель написанной дроби представляет собою сумму двух положительных слагаемых, которые не могут обратиться в нуль одновременно. Действительно, второе слагаемое обращается в нуль, только если $\sin\alpha=0$, но при этом $\cos\alpha=\pm 1$, и первое слагаемое обращается в $A^2\neq 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае знак выражения (11) совпадает со знаком A, и, следовательно, при $A>0$ будем иметь случай (I), т. е. минимум, а при $A<0$ — случай (II), т. е. максимум.

2. Предполагая попрежнему $A\neq 0$, положим, что $AC-B^2<0$. Числитель дроби (11) будет иметь знак (+) при $\sin\alpha=0$ и знак (—) при $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{B}{A}$, а потому при указанных условиях мы будем иметь случай (III), т. е. не будет ни максимума, ни минимума.

3. Если при $A\neq 0$ мы положим, что $AC-B^2=0$, то числитель дроби (11) приводится к первому слагаемому и, сохраняя неизменный знак (+), обращается в нуль при $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{B}{A}$, т. е. при этих условиях мы имеем дело с сомнительным случаем (IV).

4. Положим, что $A=0$, но $B\neq 0$. Трехчлен (10) имеет тогда вид: $\sin\alpha\,(2B\cos\alpha+C\sin\alpha)$. При значениях α, близких к нулю, выражение, стоящее в круглых скобках, сохраняет неизменный знак, совпадающий со знаком B, а первый множитель $\sin\alpha$ имеет разные знаки, смотря по тому, будет ли α больше или меньше нуля, т. е. имеет место случай (III) — ни максимума, ни минимума.

5. Предположим, наконец, что $A=B=0$. Тогда трехчлен (10) приведется к одному слагаемому $C\sin^2\alpha$ и, следовательно, не меняя знака, может обращаться в нуль, т. е. мы имеем дело с сомнительным случаем.

Принимая во внимание, что в случае 4 будет $AC-B^2<0$, в случае 5 имеем $AC-B^2=0$, можем высказать следующее правило:

Для нахождения максимумов и минимумов функции $f(x, y)$ двух независимых переменных x и y надо составить частны производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ и решить систему уравнений:

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0.$$

Пусть $x = a$, $y = b$ — какое-нибудь решение этой системы Положив

$$\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial a^2} = A, \quad \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial a\, \partial b} = B, \quad \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial b^2} = C,$$

производим исследование решения по следующей схеме:

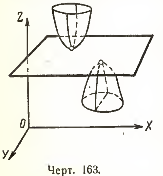
$AC - B^2$	+		−	0
A	+	−	ни мин. ни макс.	сомнит. случай
	мин.	макс.		

164. Примеры. 1. Рассмотрим поверхность $z = f(x, y)$. Уравнение касательной плоскости к ней будет [160]:

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0,$$

где p и q обозначают частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$.

Если при некоторых значениях $x = a$ и $y = b$ функция z достигает максимума или минимума, то соответствующая точка называется *вершиною* поверхности; в такой точке касательная плоскость должна быть параллельна плоскости XY, т. е. частные производные p и q должны обращаться в нуль, и поверхность должна быть расположена по одну сторону от касательной плоскости, вблизи точки касания (черт. 163). Но может случиться, что p и q в некоторой точке обращаются в нуль, т. е. касательная плоскость параллельна плоскости XY, но поверхность вблизи этой точки расположена по обе стороны от касательной плоскости, и в этом случае при соответствующих значениях x и y функция z не будет достигать ни максимума, ни минимума.



Черт. 163.

Укажем еще на одну возможность, которая может осуществиться в случае, названном нами в предыдущем сомнительным. Положим, что при $x = a$, $y = b$ касательная плоскость параллельна плоскости XY, и поверхность расположена по одну сторону от касательной плоскости, но имеет с нею общую линию, проходящую через точку касания. В этом случае разность

$$f(a + h, b + k) - f(a, b),$$

не меняя знака при достаточно малых по абсолютному значению h и k, будет обращаться в нуль при h или k, отличных от нуля. Нетрудно осуществить этот случай, представив себе, например, круговой цилиндр, ось которого параллельна плоскости XY. В этом случае также говорят, что функция $f(x, y)$ имеет максимум или минимум при $x=a$ и $y=b$.

Поверхность

$$2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

есть гиперболический параболоид. Приравнивая нулю частные производные от z по x и y, получим $x=y=0$, и касательная плоскость к поверхности в начале координат будет совпадать с плоскостью XY. Составим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{b^2},$$

и, следовательно,

$$AC - B^2 = -\frac{1}{a^2 b^2} < 0,$$

т. е. при $x=y=0$ функция z не достигает ни максимума, ни минимума, и вблизи начала координат поверхность расположена по обе стороны от касательной плоскости (черт. 164).

Черт. 164.

2. На плоскости даны n точек $M_i(a_i, b_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Требуется найти точку M такую, чтобы сумма произведений данных положительных чисел m_i на квадраты расстояний ее до точек M_i достигала минимума.

Пусть (x, y) — координаты искомой точки M. Упомянутая выше сумма будет:

$$w = \sum_{i=1}^{n} m_i [(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2].$$

Приравнивая нулю частные производные w'_x и w'_y, получаем:

$$x = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_n a_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}; \quad y = \frac{m_1 b_1 + m_2 b_2 + \ldots + m_n b_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \qquad (12)$$

Нетрудно проверить, что в рассматриваемом случае A и $AC - B^2$ будут больше нуля, и, следовательно, найденным значениям x и y, действительно будет соответствовать минимум w. Этот минимум является наименьшим значением w на плоскости (x, y), ибо $w \to +\infty$ при беспредельном удалении точки (x, y).

Если M_i — материальные точки и m_i — их массы, то *формула* (12) *определяет координаты центра тяжести системы точек M_i.*

165. Дополнительные замечания о нахождении максимумов и минимумов функции. Предыдущие рассуждения распространяются и на случай большего числа независимых переменных. Пусть, например, дана функция

трех независимых переменных $f(x, y, z)$. Для нахождения тех значений независимых переменных, при которых эта функция достигает максимума или минимума, нам надо решить систему трех уравнений с тремя неизвестными [162]:

$$f'_x(x, y, z)=0, \quad f'_y(x, y, z)=0, \quad f'_z(x, y, z)=0. \tag{13}$$

Пусть $x=a$, $y=b$, $z=c$ — одно из решений этой системы. Наметим кратко путь для исследования этих значений. Формула Тэйлора дает нам приращение функции в виде суммы однородных полиномов, расположенных по степеням приращений независимых переменных:

$$\Delta f = h\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial a} + k\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial b} + l\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial c} + \\ + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b} + l\frac{\partial}{\partial c}\right)^{(2)} f(a, b, c) + \ldots + \\ + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b} + l\frac{\partial}{\partial c}\right)^{(n+1)} f(a+\theta h, b+\theta k, c+\theta l) \\ (0<\theta<1). \tag{14}$$

Значения $x=a$, $y=b$, $z=c$ удовлетворяют уравнениям (13), и, следовательно,

$$h\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial a} + k\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial b} + l\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial c} = 0.$$

Если совокупность членов второй степени относительно h, k, l

$$\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b} + l\frac{\partial}{\partial c}\right)^{(2)} f(a, b, c) \tag{15}$$

обращается в нуль только при $h=k=l=0$, то знак правой части (14) при h, k, l, достаточно малых по абсолютному значению, совпадает со знаком выражения (15), и если этот знак $(+)$, то $f(a, b, c)$ является минимумом функции $f(x, y, z)$, если же $(-)$, то мы имеем дело с максимумом. Если выражение (15) может иметь разные знаки, то $f(a, b, c)$ не является ни максимумом, ни минимумом функции. Если же, наконец, выражение (15), не меняя знака, обращается в нуль при некоторых значениях h, k, l, отличных от $h=k=l=0$, то этот случай остается сомнительным и требуется исследование тех членов правой части (14), которые содержат h, k и l в степени выше второй.

Приведем полное исследование этого сомнительного случая в частном примере функции двух независимых переменных:

$$u = x^2 - 2xy + y^2 + x^3 + y^3.$$

Значения $x=y=0$ обращают в нуль частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$. Кроме того, имеем:

$$A = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 2, \quad B = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = -2, \quad C = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 2,$$
$$AC - B^2 = 0,$$

т. е. мы имеем дело с сомнительным случаем. Характерная особенность этого случая состоит в том, что совокупность членов второго измерения в выражении функции u представляет собою полный квадрат, и мы можем в рассматриваемом примере написать:

$$u = (x-y)^2 + (x^3 + y^3).$$

При $x=y=0$ и u обращается в нуль. Для исследования знака u при x и y, близких к нулю, введем полярные координаты:

$$x=r\cos\alpha;\quad y=r\sin\alpha.$$

Подставляя эти значения x и y, получим:

$$u=r^2[(\cos\alpha-\sin\alpha)^2+r(\cos^3\alpha+\sin^3\alpha)].$$

При любом значении α в промежутке $(0, 2\pi)$, отличном от $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$,

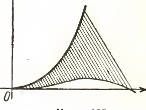
$$\cos\alpha-\sin\alpha\neq 0,$$

и, следовательно, для всякого такого значения α можно выбрать такое положительное число r_0, что при $r<r_0$ знак выражения, стоящего в квадратных скобках, будет (+). При $\alpha=\frac{\pi}{4}$ этот знак также будет (+), но при $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ мы получим знак (—), и, следовательно, при $x=y=0$ функция u не будет иметь ни максимума, ни минимума.

Рассмотрим еще функцию:

$$u=(y-x^2)^2-x^5.$$

Нетрудно проверить, что при $x=y=0$ частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ обращаются в нуль, и что мы имеем дело с сомнительным случаем. Выбирая для x сколь угодно малое значение и полагая $y=x^2$, мы видим, что функция u приведется к $(-x^5)$ и ее знак будет зависеть от знака x, т. е. при $x=y=0$ функция u не будет достигать ни максимума, ни минимума. Вводя полярные координаты, мы получили бы:



Черт. 165.

$$u=r^2(\sin^2\alpha-2r\cos^2\alpha\sin\alpha+r^2\cos^4\alpha-r^3\cos^5\alpha),$$

и из этого выражения видно, что при всяком значении α, не исключая и значений $\alpha=0$ и π, можно найти такое положительное число r_0, чтобы было $u>0$ при $r<r_0$, т. е. на всякой полупрямой, выходящей из начала координат, функция u имеет знак (+) вблизи начала координат. Однако, как мы видим, это не влечет за собой минимума в начале координат, где $u=0$, ибо нельзя найти упомянутое число r_0 так, чтобы оно было *одно и то же* для всех значений α.

В [76] мы построили кривую $(y-x^2)^2-x^5=0$ и видели, что она в начале координат имеет точку возврата второго рода, а левая часть этого уравнения имеет знак (—) вблизи начала координат, если рассматривать ее значения в точках, заключающихся в заштрихованной области между двумя ветвями кривой (черт. 165).

166. Наибольшее и наименьшее значения функции. Положим, что требуется найти наибольшее значение некоторой функции $f(x, y)$, заданной в определенной области. Указанный в [163] прием позволяет нам найти все максимумы функции *внутри* этой области, т. е. те точки внутри области, в которых значения функции больше, чем в соседних с ними точках. Для нахождения наибольшего значения функции надо принять во внимание значения функции *на границе* (контуре) данной области и сравнить ее максимумы внутри области со значениями на контуре. Наибольшее из всех этих значений и будет *наибольшим значением функции в данной области*. Аналогично находится и *наименьшее* значение функции в данной области. Для разъяснения сказанного рассмотрим пример.

На плоскости дан треугольник OAB (черт. 166), *образованный осями OX и OY и прямой*

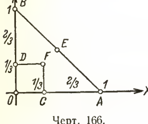
$$x + y - 1 = 0. \qquad (16)$$

Требуется найти такую точку этого треугольника, для которой сумма квадратов ее расстояний до вершин треугольника была бы наименьшей.

Принимая во внимание, что вершины A и B имеют координаты (1, 0) и (0, 1), мы можем написать выражение для вышеупомянутой суммы квадратов расстояний переменной точки (x, y) до вершин треугольника:

$$z = 2x^2 + 2y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2.$$

Приравнивая нулю частные производные первого порядка, получим $x = y = {}^1/_3$, и нетрудно показать, что этим значениям соответствует минимум $z = {}^4/_3$. Исследуем теперь значения z на контуре треугольника. Для исследования z на стороне OA надо в выражении для z положить $y = 0$:



Черт. 166.

$$z = 2x^2 + (x-1)^2 + 1,$$

причем x может меняться в промежутке (0, 1). Поступая согласно [60], убедимся, что z на стороне OA принимает наименьшее значение $z = {}^5/_3$ в точке C, для которой $x = {}^1/_3$. Точно так же и на стороне OB наименьшее значение z будет равно ${}^5/_3$ и будет достигаться в точке D, для которой $y = {}^1/_3$. Для исследования значений z на стороне AB надо, согласно уравнению (16), в выражении z положить $y = 1 - x$:

$$z = 3x^2 + 3(x-1)^2,$$

причем x может меняться в промежутке (0, 1). В данном случае наименьшее значение z будет $z = {}^3/_2$ и будет достигаться в точке E, для которой $x = y = {}^1/_2$. Мы получаем, таким образом, следующую таблицу возможных наименьших значений функции:

x, y	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}, 0$	$0, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
z	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$

Из этой таблицы мы видим, что наименьшее значение $z = {}^4/_3$ будет достигаться в точке $({}^1/_3, {}^1/_3)$. Рассматриваемая задача может быть также решена и для любого треугольника, и искомая точка является центром тяжести треугольника.

167. Относительные максимумы и минимумы. До сих пор мы рассматривали максимумы и минимумы функции, предполагая, что те переменные, от которых функция зависит, суть независимые переменные. В подобных случаях максимумы и минимумы называются *абсолютными*. Перейдем теперь к рассмотрению того случая, когда переменные, от которых зависит функция, связаны некоторыми

соотношениями. В подобных случаях максимумы и минимумы называются *относительными*.

Пусть требуется найти максимумы и минимумы функции:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n})$$

от $(m+n)$ переменных x_i, которые связаны n соотношениями:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{17}$$

В дальнейшем для сокращения письма мы не будем писать аргументов у функций. Разрешая n соотношений (17) относительно n переменных, например:

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{m+n},$$

мы выразим их через остальные m независимых переменных

$$x_1, x_2, \ldots, x_m;$$

подставляя эти выражения в функцию f, получим функцию от m независимых переменных, т. е. придем к задаче отыскания *абсолютных* максимумов и минимумов. Но такое разрешение системы (17) часто бывает практически затруднительным и даже невыполнимым, и мы укажем другой способ решения задачи, *способ множителей Лагранжа*.

Пусть в некоторой точке $M(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})$ функция f достигает относительного максимума или минимума. Предполагая существование производных в точке M, можем утверждать, что полный дифференциал функции f должен обращаться в нуль в точке M [162]:

$$\sum_{s=1}^{m+n} \frac{\partial f}{\partial x_s} dx_s = 0. \tag{18}$$

С другой стороны, дифференцируя соотношения (17), получим в той же точке M следующие n равенств:

$$\sum_{s=1}^{m+n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} dx_s = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Умножим эти последние уравнения на неопределенные пока множители:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

и сложим их все почленно друг с другом и с соотношением (18):

$$\sum_{s=1}^{m+n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_s} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_s} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_s}\right) dx_s = 0. \tag{19}$$

Определим эти n множителей так, чтобы коэффициенты при n дифференциалах

$$dx_{m+1},\ dx_{m+2},\ \ldots,\ dx_{m+n}$$

зависимых переменных были равны нулю, т. е. определим λ_1, λ_2, ..., λ_n из n равенств:

$$\frac{\partial f}{\partial x_s}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_s}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_s}+\ldots+\lambda_n\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_s}=0 \qquad (20)$$
$$(s=m+1,\ m+2,\ \ldots,\ m+n).$$

Тогда в левой части соотношения (19) останутся лишь члены, содержащие дифференциалы независимых переменных:

$$dx_1,\ dx_2,\ \ldots,\ dx_m,$$

т. е.

$$\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_s}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_s}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_s}+\ldots+\lambda_n\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_s}\right)dx_s=0. \qquad (21)$$

Но дифференциалы dx_1, dx_2, ..., dx_m независимых переменных суть величины произвольные. Приравнивая один из них единице, а остальные нулю, мы видим, что из равенства (21) вытекает, что все коэффициенты этого равенства должны быть равны нулю [158], т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_s}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_s}+\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_s}+\ldots+\lambda_n\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_s}=0 \qquad (22)$$
$$(s=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Надо считать, что во всех предыдущих формулах, начиная с (18), переменные x_s заменены координатами той точки M, в которой f достигает, по предположению, относительного максимума или минимума. В частности, это относится и к уравнениям (20), из которых должны быть определены λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Таким образом, уравнения (22) и (17) выражают необходимое условие того, что в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})$ достигается относительный максимум или минимум.

Уравнения (22) *и* (17) *дадут нам* $(m+2n)$ *уравнений для определения* $(m+n)$ *переменных* x_s *и* n *множителей* λ_i.

Из системы (22) *видно, что для определения тех значений переменных* x_s, *при которых функция* f *достигает относительного максимума или минимума, надо приравнять нулю частные производные по всем* x_s *от функции* Φ, *определяемой равенством:*

$$\Phi=f+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\ldots+\lambda_n\varphi_n,$$

считая λ_1, λ_2, ..., λ_n *постоянными, и присоединить* n *уравнений связи* (17).

В следующем параграфе мы кратко изложим вопрос о достаточных условиях.

Отметим, что при выводе указанного правила мы предположили не только существование производных у функций f и φ_i, но и возможность определения множителей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ из уравнения (20). В связи с этим указанное правило может не дать нам некоторых значений $(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})$, для которых достигается относительный максимум или минимум. Мы выясним сейчас более подробно это обстоятельство в простейших случаях и уточним теорию.

168. Дополнительные замечания. Пусть ищутся относительные максимумы и минимумы функции $f(x, y)$ при одном дополнительном условии:

$$\varphi(x, y) = 0, \tag{23}$$

и предположим, что, например, относительный максимум достигается в точке (x_0, y_0), так что $\varphi(x_0, y_0) = 0$. Пусть $\varphi(x, y)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка в точке (x_0, y_0) и ее некоторой окрестности, и предположим, кроме того, что

$$\varphi'_{y_0}(x_0, y_0) \neq 0. \tag{24}$$

При этом уравнение (23) определит единственным образом в окрестности $x = x_0$ функцию $y = \omega(x)$, непрерывную, с непрерывной производной и такую, что $y_0 = \omega(x_0)$ [157]. Подставляя $y = \omega(x)$ в функцию $f(x, y)$, мы можем утверждать, что функция $f[x, \omega(x)]$ одного переменного x должна достигать максимума при $x = x_0$ и, следовательно, ее полная производная по x должна обращаться в нуль при $x = x_0$, т. е.

$$f'_{x_0}(x_0, y_0) + f'_{y_0}(x_0, y_0)\,\omega'(x_0) = 0.$$

Подставляя $y = \omega(x)$ в (23) и дифференцируя по x, получим в точке (x_0, y_0) [69]:

$$\varphi'_{x_0}(x_0, y_0) + \varphi'_{y_0}(x_0, y_0)\,\omega'(x_0) = 0.$$

Умножая второе уравнение на λ и складывая почленно с первым, получим:

$$(f'_{x_0} + \lambda\varphi'_{x_0}) + (f'_{y_0} + \lambda\varphi'_{y_0})\,\omega'(x_0) = 0.$$

Определяя λ из условия $f'_{y_0} + \lambda\varphi'_{y_0} = 0$, что возможно, в силу (24), будем иметь $f'_{x_0} + \lambda\varphi'_{x_0} = 0$, т. е. придем к двум уравнениям:

$$f'_{x_0} + \lambda\varphi'_{x_0} = 0; \quad f'_{y_0} + \lambda\varphi'_{y_0} = 0, \tag{25}$$

к которым надо присоединить еще уравнение $\varphi(x_0, y_0) = 0$, чем и оправдывается способ множителей. Если условие (24) не выполнено, т. е. $\varphi'_{y_0}(x_0, y_0) = 0$, но $\varphi'_{x_0}(x_0, y_0) \neq 0$, то можно повторить все предыдущие рассуждения, меняя x и y ролями. Если в точке (x_0, y_0) мы имеем:

$$\varphi'_{x_0}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi'_{y_0}(x_0, y_0) = 0, \tag{26}$$

то мы не можем доказать, что точка (x_0, y_0) получается при помощи правила множителей.

Равенства (26) показывают, что точка (x_0, y_0) является особой точкой кривой (23) [76]. Дадим сейчас пример такой задачи, для которой имеют место условия (26) в точке относительного минимума.

Пусть требуется найти кратчайшее расстояние от точки $(-1, 0)$ до точек, лежащих на полукубической параболе $y^2 - x^3 = 0$, изображенной на черт. 87 [76]. Таким образом, ищется минимум функции $f = (x+1)^2 + y^2$ при

условии $\varphi = y^2 - x^3 = 0$. Геометрически очевидно, что минимум достигается в точке (0, 0), лежащей на полукубической параболе, причем эта точка является особой точкой параболы. Способ множителей приведет нас к следующим двум уравнениям:

$$2(x+1) - 3\lambda x^2 = 0, \quad 2y + 2\lambda y = 0.$$

При подстановке $x = 0$, $y = 0$ первое уравнение приводит к нелепому равенству $2 = 0$, а второе — удовлетворено при любом λ. В данном случае способ множителей не приведет нас к точке (0, 0), в которой достигается относительный минимум. Совершенно аналогично можно показать, что если в точке (x_0, y_0, z_0) функция достигает максимума или минимума, при одном дополнительном условии $\varphi(x, y, z) = 0$, и притом, по крайней мере, одна из частных производных первого порядка функции φ отлична от нуля в точке (x_0, y_0, z_0), то эта точка может быть получена по способу множителей.

Аналогичны рассуждения и в более общих случаях, но при этом приходится ссылаться на теорему существования неявных функций для систем уравнений, о чем мы упоминали в [157]. Пусть, например, функция $f(x, v, z)$ достигает относительного максимума в точке (x_0, y_0, z_0) при двух дополнительных условиях:

$$\varphi(x, y, z) = 0; \quad \psi(x, y, z) = 0 \tag{27}$$

и при обычных предположениях существования и непрерывности производных, и пусть мы имеем:

$$\varphi'_{y_0}(x_0, y_0, z_0)\psi'_{z_0}(x_0, y_0, z_0) - \varphi'_{z_0}(x_0, y_0, z_0)\psi'_{y_0}(x_0, y_0, z_0) \neq 0. \tag{28}$$

При этом уравнения (27) определяют единственным образом функции: $y = \omega_1(x)$; $z = \omega_2(x)$ такие, что $v_0 = \omega_1(x_0)$; $z_0 = \omega_2(x_0)$. Подставляя эти функции в функцию f, получим функцию одного x, которая имеет максимум при $x = x_0$, откуда следует:

$$f'_{x_0}(x_0, y_0, z_0) + f'_{y_0}(x_0, y_0, z_0)\omega'_1(x_0) + f'_{z_0}(x_0, y_0, z_0)\omega'_2(x_0) = 0.$$

Подставляя указанные функции в (27) и дифференцируя по x в точке (x_0, y_0, z_0), получим:

$$\varphi'_{x_0} + \varphi'_{y_0}\omega'_1(x_0) + \varphi'_{z_0}\omega'_2(x_0) = 0; \quad \psi'_{x_0} + \psi'_{y_0}\omega'_1(x_0) + \psi'_{z_0}\omega'_2(x_0) = 0.$$

Умножаем эти равенства на λ_1, λ_2 и складываем с предыдущим:

$$(f'_{x_0} + \lambda_1\varphi'_{x_0} + \lambda_2\psi'_{x_0}) + (f'_{y_0} + \lambda_1\varphi'_{y_0} + \lambda_2\psi'_{y_0}) + (f'_{z_0} + \lambda_1\varphi'_{z_0} + \lambda_2\psi'_{z_0}) = 0. \tag{29}$$

Принимая во внимание (28), можем утверждать, что из двух уравнений

$$f'_{y_0} + \lambda_1\varphi'_{y_0} + \lambda_2\psi'_{y_0} = 0; \quad f'_{z_0} + \lambda_1\varphi'_{z_0} + \lambda_2\psi'_{z_0} = 0 \tag{30}$$

мы сможем определить λ_1 и λ_2, и уравнение (29) после этого приведет нас к равенству

$$f'_{x_0} + \lambda_1\varphi'_{x_0} + \lambda_2\psi'_{x_0} = 0, \tag{31}$$

чем и оправдывается способ множителей для данного случая. К уравнениям (30) и (31) надо добавить еще:

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{и} \quad \psi(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Вместо условия (28) мы могли бы поставить аналогичное условие, дифференцируя не по y_0 и z_0, а по x_0 и y_0 или по x_0 и z_0. Но если не только выражение, стоящее в левой части (28), но и два других аналогичных

выражения, которые получаются при дифференцировании по x_0 и y_0 или по x_0 и z_0, равны нулю, то мы не сможем оправдать способ множителей для точки (x_0, y_0, z_0). Можно показать, что во всех рассмотренных в следующем номере примерах мы не можем иметь такого случая. Так, например, в примере 1 мы имеем одно дополнительное условие (32), и в левой части этого условия, по крайней мере, одно из чисел A, B и C отлично от нуля. Если, например, $C \neq 0$, то производная левой части (32) по z равна числу C и, следовательно, отлична от нуля во всякой точке (x, y, z). Это и указывает на то, что в рассматриваемом случае всякий ответ должен получаться по способу множителей.

Приведем теперь короткие указания о достаточных условиях относительного максимума или минимума, ограничиваясь тем случаем, когда мы имеем две независимые переменные. Пусть ищутся относительные максимумы и минимумы функции $f(x, y, z)$ при наличии одной связи $\varphi(x, y, z) = 0$. Составляем функцию $\Phi = f + \lambda\varphi$. Положим, что, приравнивая нулю ее производные первого порядка по x, y, z и учитывая уравнение связи, мы получали значения $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $\lambda = \lambda_0$. Мы должны испытать полученные значения переменных, т. е. определить знак разности $f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$ при всех (x, y, z), достаточных близких к (x_0, y_0, z_0) и удовлетворяющих уравнению связи $\varphi(x, y, z) = 0$. Введем функцию $\psi(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda_0\varphi(x, y, z)$. Из уравнения связи непосредственно следует, что вместо разности $f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$ можно взять разность $\psi(x, y, z) - \psi(x_0, y_0, z_0)$ и исследовать ее знак. Частные производные первого порядка функции $\psi(x, y, z)$ в точке (x_0, y_0, z_0) обращаются по условию в нуль. Разлагая последнюю разность по формуле Тэйлора и ограничиваясь членами со вторыми производными, получим выражение вида [ср. 165]:

$$\psi(x, y, z) - \psi(x_0, y_0, z_0) = a_{11}\, dx^2 + a_{22}\, dy^2 + a_{33}\, dz^2 + \\ + 2a_{12} dx\, dy + 2a_{13}\, dx\, dz + 2a_{23} dy\, dz + \ldots,$$

где через a_{ik} мы обозначим значения соответствующих частных производных второго порядка функции $\psi(x, y, z)$ в точке $(x_0, y_0\, z_0)$ и через dx, dy, dz — приращения переменных. Положим, что $\varphi_{z_0}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, так что уравнение связи определяет $z = \omega(x, y)$, причем $z_0 = \omega(x_0, y_0)$. Из уравнения связи получаем

$$\varphi_x(x, y, z)\, dx + \varphi_y(x, y, z)\, dy + \varphi_z(x, y, z)\, dz = 0.$$

Подставляя сюда значения $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, выражаем dz через dx и dy:

$$dz = -\frac{\varphi_{x_0}(x_0, y_0, z_0)}{\varphi_{z_0}(x_0, y_0, z_0)}\, dx - \frac{\varphi_{y_0}(x_0, y_0, z_0)}{\varphi_{z_0}(x_0, y_0, z_0)}\, dy.$$

Подставляя это выражение dz в предыдущую формулу и собирая подобные члены, получим:

$$\psi(x, y, z) - \psi(x_0, y_0, z_0) = A\, dx^2 + 2B\, dx\, dy + C\, dy^2 + \ldots$$

Теперь можно использовать признак максимума и минимума из [163]. Так, например, если $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$, то в точке (x_0, y_0, z_0) функция $f(x, y, z)$ имеет относительный минимум. Из рассуждений, приведенных в [163], непосредственно следует, что для обоснования указанного правила достаточно предположить, что функции $f(x, y, z)$ и $\varphi(x, y, z)$ имеют в точке (x_0, y_0, z_0) и ее окрестности непрерывные производные до второго порядка.

Мы не останавливаемся более подробно на вопросе о достаточных условиях относительного максимума и минимума. Существенными в предыдущих рассуждениях являлись замена разности $f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$

разиостью $\psi(x, y, z) - \psi(x_0, y_0 z_0)$, у которой производные первого порядка в точке (x_0, y_0, z_0) равны иулю, а также факт, что дифференциал dz зависимого переменного определялся через дифференциалы dx, dy независимых перемеиных из уравиеиия первой степеии. Аиалогичиым образом иадо поступать для выяснеиия достаточиых условий и при другом числе перемеиых и связей.

169. Примеры. 1. *Требуется найти кратчайшее расстояние от точки* (a, b, c) *до плоскости:*

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{32}$$

Квадрат расстояиия от даииой точки (a, b, c) до перемеииой точки (x, y, z) выражается формулой

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2. \tag{33}$$

В даином случае коордииаты (x, y, z) должиы удовлетворять уравиеиию (32) (точка должна находиться иа плоскости). Найдем минимум выражеиия (33) при условии (32). Составляем функцию:

$$\Phi = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + \lambda_1 (Ax + By + Cz + D).$$

Приравиивая нулю ее частиые производиые по x, y, z, получим:

$$x = a - \frac{1}{2}\lambda_1 A, \quad y = b - \frac{1}{2}\lambda_1 B, \quad z = c - \frac{1}{2}\lambda_1 C. \tag{34}$$

Подставляя эти зиачения в условие (32), можем определить λ_1:

$$\lambda_1 = \frac{2(Aa + Bb + Cc + D)}{A^2 + B^2 + C^2}. \tag{35}$$

Мы получили едииствеииый ответ, и так как иаимеиьшее значеиие должио существовать, то ему и должиы соответствовать иайдеиные зиачеиия перемеиных. Подставляя зиачеиия (34) в выражеиие (33), получаем выражение для квадрата расстояния от точки до плоскости:

$$r_0^2 = \frac{1}{4}\lambda_1^2 (A^2 + B^2 + C^2),$$

где λ_1 определяется по формуле (35).

2. *Разложить данное положительное число* a *на три положительных слагаемых* x, y, z *так, чтобы выражение:*

$$x^m y^n z^p \tag{36}$$

было наибольшим (m, n, p — даииые положительиые числа). Найдем максимум выражеиия (36) при условии

$$x + y + z = a. \tag{37}$$

Вместо максимума выражеиия (36) можио искать максимум его логарифма

$$m \log x + n \log y + p \log z.$$

Составляем фуикцию:

$$\Phi = m \log x + n \log y + p \log z + \lambda_1 (x + y + z - a).$$

Приравнивая нулю ее частные производные, получим:

$$x=-\frac{m}{\lambda_1},\quad y=-\frac{n}{\lambda_1},\quad z=-\frac{p}{\lambda_1},$$

и соотношение (37) дает:

$$\lambda_1=-\frac{m+n+p}{a},$$

т. е.

$$x=\frac{ma}{m+n+p},\quad y=\frac{na}{m+n+p},\quad z=\frac{pa}{m+n+p},\tag{38}$$

причем найденные значения переменных суть положительные числа. Можно показать, что при поставленных условиях выражение (36) должно иметь наибольшее значение, и единственность ответа показывает, как и в примере 1, что найденным значениям переменных и соответствует, именно, наибольшее значение выражения (36).

Формулы (38) показывают, что для решения задачи число a надо разбить на части, пропорциональные показателям m, n и p.

Предлагаем читателю в последних двух примерах провести исследование достаточных условий по методу, указанному в предыдущем параграфе.

Черт. 167.

3. *Проводник длины l_0 разветвляется на одном из своих концов на k отдельных проводников длин l_s $(s=1, 2, \ldots, k)$, причем сила тока в соответствующих частях проводника есть i_0, $i_1, \ldots, i_k$. Спрашивается, как надо выбрать площади поперечных сечений $q_0, q_1, \ldots, q_k$ отдельных частей проводника для того, чтобы при данной разности потенциалов E для цепей (l_0, l_1), (l_0, l_2) $\ldots$, (l_0, l_k) пошло наименьшее количество материала V* (черт. 167).

Обозначим буквою c сопротивление проволоки из данного вещества, длина которой и площадь поперечного сечения равны единице.

Функция V переменных $q_0, q_1, \ldots, q_k$, наименьшее значение которой ищется, будет:

$$V=l_0q_0+l_1q_1+\ldots+l_kq_k.$$

Принимая во внимание данную разность потенциалов E, можем написать k соотношений:

$$\varphi_s=c\left(\frac{l_0i_0}{q_0}+\frac{l_si_s}{q_s}\right)-E=0\quad(s=1, 2, \ldots, k).\tag{39}$$

Составим функцию:

$$\Phi=(l_0q_0+l_1q_1+\ldots+l_kq_k)+\sum_{s=1}^{k}\lambda_s\left[c\left(\frac{l_0i_0}{q_0}+\frac{l_si_s}{q_s}\right)-E\right].$$

Приравнивая нулю частные производные от Φ по $q_0, q_1, \ldots, q_k$, получим:

$$\left.\begin{aligned}&l_0-\frac{cl_0i_0}{q_0^2}(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k)=0,\\&l_s-\frac{\lambda_scl_si_s}{q_s^2}=0\ (s=1, 2, \ldots, k).\end{aligned}\right\}\tag{40}$$

Из условий (39) получим:

$$\frac{l_1 i_1}{q_1} = \frac{l_2 i_2}{q_2} = \ldots = \frac{l_k l_k}{q_k} = \frac{E}{c} - \frac{l_0 l_0}{q_0};$$

обозначив буквою σ общую величину этих отношений, можем написать:

$$q_s = \frac{l_s i_s}{\sigma} \quad (s = 1, 2, \ldots, k), \qquad \sigma = \frac{E}{c} - \frac{l_0 i_0}{q_0}. \tag{41}$$

Из уравнений (40) имеем:

$$\lambda_s = \frac{q_s^2}{c i_s} = \frac{l_s^2 i_s}{c \sigma^2}.$$

Подставив эти выражения λ_s в первые из уравнений (40), получим:

$$q_0^2 = \frac{i_0}{\sigma^2}(l_1^2 i_1 + l_2^2 i_2 + \ldots + l_k^2 i_k),$$

или

$$q_0 = \frac{\sqrt{i_0 (l_1^2 i_1 + l_2^2 i_2 + \ldots + l_k^2 i_k)}}{\frac{E}{c} - \frac{l_0 i_0}{q_0}},$$

откуда окончательно:

$$q_0 = \frac{c}{E}\left[i_0 l_0 + \sqrt{i_0 (l_1^2 i_1 + l_2^2 i_2 + \ldots + l_k^2 i_k)}\right].$$

Подставляя это выражение q_0 в соотношения (41), получим для q_1, q_2, ..., q_k:

$$q_s = \frac{c l_s i_s}{E}\left(1 + \frac{l_0 l_0}{\sqrt{i_0 (l_1^2 i_1 + l_2^2 i_2 + \ldots + l_k^2 i_k)}}\right) \quad (s = 1, 2, \ldots, k).$$

Таким образом, необходимые условия максимума и минимума V дают нам единственную систему положительных значений для $q_0, q_1, \ldots, q_k$; но из физических соображений ясно, что при некотором выборе площадей поперечных сечений должно получаться наименьшее количество материала, и можно поэтому утверждать, что полученные значения $q_0, q_1, \ldots, q_k$ и дадут решения задачи.

ГЛАВА VI

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, НАЧАЛА ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

§ 17. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

170. Комплексные числа. Если ограничиваться только вещественными числами, то, как известно, действие извлечения корня не всегда выполнимо; корень четной степени из отрицательного числа не имеет ответа в области вещественных чисел. В связи с этим уже квадратное уравнение с вещественными коэффициентами не всегда имеет вещественные корни. Это обстоятельство приводит, естественно, к расширению понятия о числе, к введению новых чисел более общей природы, частным случаем которых являются вещественные числа. При этом существенно определить эти числа и действия над ними таким образом, чтобы для новых чисел остались в силе все основные законы действий, известные для вещественных чисел. Это, как мы покажем дальше, оказывается возможным.

Не только указанная выше невыполнимость, в некоторых случаях, действия извлечения корня, но и простые геометрические соображения приводят к естественному расширению понятия о числе. Мы и будем руководиться этими геометрическими соображениями при расширении понятия о числе.

Мы знаем, что всякое вещественное число графически можно изобразить или как отрезок, отложенный на данной оси OX, или же как точку на этой оси, если условимся начала всех отрезков помещать в начало координат; обратно — всякому отрезку или точке на оси OX соответствует определенное вещественное число.

Если теперь вместо одной оси OX рассматривать всю *плоскость*, отнесенную к координатным осям OX, OY, то, обобщив надлежащим образом понятие о числе, мы получим возможность каждому *вектору*, лежащему в этой плоскости, или каждой ее *точке* сопоставить некоторое число, которое мы назовем *комплексным*.

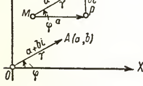
Если условимся не различать между собой векторы, равные по длине и одинаково направленные, то можно сопоставить вещественное число не только всякому вектору на оси OX, но, вообще, всякому вектору, параллельному оси OX. В частности, вектору длины

единица, направление которого совпадает с положительным направлением оси OX, соответствует вещественное число единица.

Вектору длины единица, направление которого совпадает с положительным направлением оси OY, сопоставим символ i, называемый *мнимой единицей*. Всякий вектор $\overline{MN}$ плоскости может быть представлен как сумма двух векторов $\overline{MP}$ и $\overline{PN}$, параллельных осям координат (черт. 168). Вектору $\overline{MP}$, параллельному оси OX, соответствует некоторое вещественное число a. Вектору $\overline{PN}$, параллельному оси OY, пусть соответствует символ bi, где b — вещественное число, абсолютное значение которого равно длине вектора $\overline{PN}$, и которое будет положительным, если направление $\overline{PN}$ совпадает с положительным направлением оси OY, и отрицательным, если направление $\overline{PN}$ противоположно положительному направлению OY. Таким образом, естественно, вектору $\overline{MN}$ сопоставить *комплексное число*, имеющее вид

$$a+bi.$$

Отметим тот факт, что знак (+) в написанном выражении $a+bi$ не есть знак действия. Это выражение надо рассматривать как единый символ для обозначения комплексного числа. После определения сложения комплексных чисел мы вернемся к рассмотрению этого знака.



Черт. 168.

Вещественные числа a и b представляют собой, очевидно, величины проекций вектора $\overline{MN}$ на координатные оси.

Отложим от начала координат вектор $\overline{OA}$ (черт. 168), совпадающий по длине и направлению с вектором $\overline{MN}$. Конец этого вектора A будет иметь координаты (a, b), и этой точке A мы можем сопоставить то же комплексное число $a+bi$, что и векторам $\overline{MN}$ и $\overline{OA}$.

Итак, *всякому вектору плоскости (всякой точке плоскости) соответствует определенное комплексное число $a+bi$. Вещественные числа a и b равны проекциям рассматриваемого вектора на координатные оси (координатам рассматриваемой точки).*

Придавая в выражении $a+bi$ буквам a и b всевозможные вещественные значения, получим совокупность комплексных чисел; a называется *вещественной* и bi — *мнимой частью* комплексного числа.

В частном случае вектора, параллельного оси OX, комплексное число совпадает со своей вещественной частью:

$$a+0i=a. \tag{1}$$

Таким образом, вещественное число a мы считаем, частным случаем комплексного числа.

Понятие о равенстве двух комплексных чисел вытекает из их геометрической интерпретации. Два вектора считаются равными, если они имеют одинаковую длину и совпадающее направление, т. е. если они имеют одинаковые проекции на координатные оси, а потому *два комплексных числа считаются равными между собой тогда и только тогда, когда в отдельности равны их вещественные и мнимые части, т. е. условие равенства комплексных чисел будет:*

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \text{ равносильно } a_1 = a_2,\ b_1 = b_2. \qquad (2)$$

В частности,

$$a + bi = 0 \text{ равносильно } a = 0;\ b = 0.$$

Вместо того, чтобы определить вектор $\overline{MN}$ его проекциями a и b на координатные оси, мы можем определить его двумя другими величинами, а именно: его длиною r и углом φ, который направление $\overline{MN}$ образует с положительным направлением оси OX (черт. 168). Если же мы считаем, что комплексное число $a + bi$ соответствует точке с координатами (a, b), то r и φ будут, очевидно, полярными координатами этой точки. Как известно, имеют место соотношения:

$$a = r\cos\varphi; \quad b = r\sin\varphi;$$

$$\left.\begin{aligned} r = \sqrt{a^2 + b^2};\ \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \\ \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Положительное число r называется *модулем*, φ — *аргументом* комплексного числа $a + bi$. Аргумент определяется лишь с точностью до слагаемого, кратного 2π, так как всякий вектор $\overline{MN}$ совместится сам с собой, если его повернуть на любое число полных оборотов в ту или иную сторону вокруг точки M. В случае $r = 0$, комплексное число равно нулю, и его аргумент совершенно неопределенен. *Условие равенства* двух комплексных чисел состоит, очевидно, в том, что *модули их должны быть равны, а аргументы могут отличаться лишь слагаемым, кратным* 2π.

Вещественное число имеет аргумент $2k\pi$, если оно положительное, и $(2k+1)\pi$, если оно отрицательное, где k — любое целое число. Если вещественная часть комплексного числа равна нулю, то комплексное число имеет вид bi и называется *чисто мнимым*. Соответствующий такому числу вектор параллелен оси OY, и аргумент чисто мнимого числа bi равен $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, если $b > 0$, и $\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, если $b < 0$.

Модуль вещественного числа совпадает с его абсолютным значением. Для обозначения модуля числа $a + bi$ пишут это число между двумя вертикальными чертами:

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

В дальнейшем мы будем часто обозначать комплексное число одной буквой. Если α есть комплексное число, то его модуль будет обозначаться символом $|\alpha|$. Пользуясь выражением (3) для a и b, можем выразить комплексное число через его модуль и аргумент в виде:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

В этом случае говорят, что комплексное число написано в *тригонометрической форме*.

171. Сложение и вычитание комплексных чисел. Сумма векторов представляет собою замыкающую многоугольника, составленного из слагаемых векторов. Принимая во внимание, что проекция замыкающей равна сумме проекций составляющих, мы приходим к следующему *определению сложения комплексных чисел:*

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \ldots + (a_n + b_n i) = \\ = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)\, i. \qquad (4)$$

Нетрудно видеть, что сумма комплексных чисел не зависит от порядка слагаемых (переместительный закон) и что слагаемые можно объединять в группы (сочетательный закон), ибо такими свойствами обладают сумма вещественных чисел a_k и сумма вещественных чисел b_k.

Как мы упоминали выше, комплексное число $a + 0i$ отождествляется с вещественным числом a. Точно так же число $0 + bi$ записывают просто в виде bi (чисто мнимое число). Пользуясь определением сложения, мы можем утверждать, что комплексное число $a + bi$, есть сумма вещественного числа a и чисто мнимого числа bi, т. е. $a + bi = (a + 0i) + (0 + bi)$.

Вычитание определяется как действие, обратное сложению, т. е. разность

$$x + yi = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i)$$

определяется из условия

$$(x + yi) + (a_2 + b_2 i) = a_1 + b_1 i,$$

или, в силу (4) и (2): $x + a_2 = a_1$; $y + b_2 = b_1$, т. е. $x = a_1 - a_2$, $y = b_1 - b_2$, и окончательно получаем:

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i. \qquad (5)$$

Вычитание комплексного числа $(a_2 + b_2 i)$, как мы видим, равносильно сложению уменьшаемого $(a_1 + b_1 i)$ и комплексного числа $(-a_2 - b_2 i)$. Это соответствует следующему: *вычитание векторов сводится к сложению вектора уменьшаемого с вектором, по величине равным вычитаемому, а по направлению ему противоположным.*

Рассмотрим вектор $\overline{A_2A_1}$, начальной точке A_2 которого соответствует комплексное число $a_2 + b_2 i$ и концу A_1 — число $a_1 + b_1 i$.

Этот вектор представляет собой, очевидно, разность векторов $\overline{OA_1}$ и $\overline{OA_2}$ (черт. 169) и, следовательно, ему соответствует комплексное число

$$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\,i,$$

равное разности комплексных чисел, соответствующих его концу и его началу.

Установим теперь свойства модуля суммы и разности двух комплексных чисел. Принимая во внимание, что модуль комплексного числа равен длине соответствующего этому числу вектора и что одна сторона треугольника короче суммы двух других, получим (черт. 170):

$$|\alpha_1 + \alpha_2| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2|,$$

причем знак равенства будет иметь место лишь в том случае, когда векторы, соответствующие комплексным числам α_1 и α_2, имеют одинаковое направление, т. е. когда аргументы этих чисел или равны, или отличаются на кратное 2π. Доказанное свойство имеет, очевидно, место и в случае любого числа слагаемых:

Черт. 169.

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n|,$$

т. е. *модуль суммы меньше или равен сумме модулей слагаемых, причем знак равенства имеет место лишь в том случае, когда аргументы слагаемых равны или отличаются кратным* 2π.

Принимая во внимание, что сторона треугольника больше разности двух других сторон, можем, кроме того, написать:

$$|\alpha_1 + \alpha_2| \geqslant |\alpha_1| - |\alpha_2|,$$

т. е. *модуль суммы двух слагаемых больше или равен разности модулей этих слагаемых*. Равенство будет иметь место лишь в том случае, когда направления соответствующих векторов противоположны.

Черт. 170.

Вычитание векторов и комплексных чисел приводится, как это мы видели выше, к сложению, и для модуля разности двух комплексных чисел будем, как и для модуля суммы, иметь (черт. 170):

$$|\alpha_1| - |\alpha_2| \leqslant |\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2|.$$

172. Умножение комплексных чисел. Произведение двух комплексных чисел мы определяем аналогично произведению вещественных чисел, а именно: произведение рассматривается как число,

составленное из множимого, как множитель составлен из единицы. Вектор, соответствующий комплексному числу с модулем r и аргументом φ, может быть получен из *единичного вектора*, длина которого равна единице и направление которого совпадает с положительным направлением оси OX, путем его удлинения в r раз и поворота в положительном направлении на угол φ.

Произведением некоторого вектора $\mathbf{a}_1$ на вектор $\mathbf{a}_2$ назовем вектор, который получится, если к вектору $\mathbf{a}_1$ применить вышеуказанные удлинение и поворот, при помощи которых вектор $\mathbf{a}_2$ получается из единичного вектора, причем последнему соответствует, очевидно, вещественная единица.

Если (r_1, φ_1), (r_2, φ_2) суть модули и аргументы комплексных чисел, соответствующих векторам $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, то произведению этих векторов будет, очевидно, соответствовать комплексное число с модулем $r_1 r_2$ и аргументом $(\varphi_1 + \varphi_2)$. Мы приходим, таким образом, к следующему определению произведения комплексных чисел:

Произведением двух комплексных чисел называется такое комплексное число, модуль которого равен произведению модулей сомножителей и аргумент — сумме аргументов сомножителей.

Таким образом, в том случае, когда комплексные числа написаны в тригонометрической форме, будем иметь:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ = r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \qquad (6)$$

Выведем теперь правило составления произведения для того случая, когда комплексные числа даны не в тригонометрической форме:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = x + yi.$$

Пользуясь указанным выше обозначением модулей и аргументов сомножителей, можем написать:

$$a_1 = r_1\cos\varphi_1; \quad b_1 = r_1\sin\varphi_1; \quad a_2 = r_2\cos\varphi_2; \quad b_2 = r_2\sin\varphi_2;$$

согласно определению умножения (6):

$$x = r_1 r_2\cos(\varphi_1+\varphi_2); \quad y = r_1 r_2\sin(\varphi_1+\varphi_2),$$

откуда:

$$x = r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) = \\ = r_1\cos\varphi_1\cdot r_2\cos\varphi_2 - r_1\sin\varphi_1\cdot r_2\sin\varphi_2 = a_1a_2 - b_1b_2,$$
$$y = r_1 r_2(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2) = r_1\sin\varphi_1\cdot r_2\cos\varphi_2 + \\ + r_1\cos\varphi_1\cdot r_2\sin\varphi_2 = b_1a_2 + a_1b_2,$$

и окончательно получим:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (b_1a_2 + a_1b_2)\,i. \qquad (7)$$

В случае $b_1 = b_2 = 0$ сомножители являются вещественными числами a_1 и a_2, и произведение приводится к произведению a_1a_2 этих чисел.

В случае $a_1 = a_2 = 0$ и $b_1 = b_2 = 1$, равенство (7) дает:

$$i \cdot i = i^2 = -1,$$

т. е. *квадрат мнимой единицы равен* (-1).

Вычисляя последовательно целые положительные степени i, получим

$$i^2 = -1;\ i^3 = -i;\ i^4 = 1;\ i^5 = i;\ i^6 = -1;\ \ldots$$

и, вообще, при всяком целом положительном k:

$$i^{4k} = 1;\ i^{4k+1} = i;\ i^{4k+2} = -1;\ i^{4k+3} = -i.$$

Правило умножения, выражаемое равенством (7), можно формулировать так: *комплексные числа надо перемножать, как буквенные многочлены, считая* $i^2 = -1$.

Если α есть комплексное число $a + bi$, то комплексное число $a - bi$ называется *сопряженным* с α, и его обозначают через $\bar{\alpha}$.

Согласно формулам (3):

$$|\alpha|^2 = a^2 + b^2.$$

Но из равенства (7) вытекает:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2,$$

а следовательно:

$$|\alpha|^2 = (a + bi)(a - bi) = \alpha\bar{\alpha},$$

т. е. *произведение сопряженных комплексных чисел равно квадрату модуля каждого из них.*

Отметим еще очевидные формулы:

$$\alpha + \bar{\alpha} = 2a; \quad \alpha - \bar{\alpha} = 2bi. \tag{8}$$

Из формул (4) и (7) непосредственно следует, что сложение и умножение комплексных чисел подчиняются переместительному закону, т. е. сумма не зависит от порядка слагаемых, а произведение — от порядка сомножителей. Нетрудно проверить и справедливость сочетательного и распределительного законов, выражающихся следующими тождествами:

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3); \quad (\alpha_1\alpha_2)\alpha_3 = \alpha_1(\alpha_2\alpha_3);$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2)\beta = \alpha_1\beta + \alpha_2\beta.$$

Предоставляем сделать это читателю.

Заметим, наконец, что *произведение нескольких сомножителей будет иметь модуль, равный произведению модулей сомножителей,*

и аргумент, равный сумме аргументов сомножителей. Таким образом, произведение комплексных чисел будет равно нулю тогда и только тогда, когда, по крайней мере, один из сомножителей равен нулю.

173. Деление комплексных чисел. Деление комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению. Таким образом, если (r_1, φ_1) — модуль и аргумент делимого, а (r_2, φ_2) — модуль и аргумент делителя, то нетрудно видеть, что деление имеет один определенный результат, если делитель отличен от нуля, и что модуль частного будет $\frac{r_1}{r_2}$, а аргумент его $(\varphi_1 - \varphi_2)$. Обозначая частное в виде дроби, можем написать:

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]. \tag{9}$$

Итак, *модуль частного равен частному модулей делимого и делителя, и аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.* Если $r_2 = 0$, то формула (9) теряет смысл.

Если делимое и делитель даны не в тригонометрической форме, а в виде $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$, то, выражая в формуле (9) модули и аргументы через a_1, a_2, b_1, b_2, получим следующее выражение для частного:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i,$$

которое можно получить и непосредственно, рассматривая i как иррациональность и умножая числитель и знаменатель на комплексное число, сопряженное со знаменателем, для того чтобы освободиться от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2)\, i}{a_2^2 + b_2^2},$$

и окончательно:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i. \tag{10}$$

Раньше [172] мы указали на то, что переместительный, сочетательный и распределительный законы сохраняют свою силу и при сложении и умножении комплексных чисел, а потому для выражений, содержащих комплексные числа, оказываются справедливыми все те преобразования, которые являются следствиями этих законов и которые хорошо известны в применении к вещественным числам. Сюда относятся, например: правило вынесения за скобку, раскрытие скобок, простейшие формулы, формула бинома Ньютона в случае целого положительного показателя, формулы, относящиеся к прогрессиям, и т. д.

Отметим еще одно важное свойство выражений, содержащих комплексные числа, связанные знаками первых четырех действий. Из формул (4), (5), (7) и (10) непосредственно вытекает следующее предложение: *если в сумме, разности, произведении и частном заменим все числа сопряженными, то и результаты действий заменятся сопряженными.*

Так, например, заменяя в формуле (7) b_1 и b_2 на $(-b_1)$ и $(-b_2)$, получим:

$$(a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (b_1 a_2 + a_1 b_2) i.$$

Указанное свойство будет, очевидно, справедливым и для любого выражения, содержащего комплексные числа, связанные знаками первых четырех действий.

174. Возвышение в степень. Применяя формулу (6) в случае n равных сомножителей, получаем правило возвышения комплексного числа в целую положительную степень:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{11}$$

т. е. *для возвышения комплексного числа в целую положительную степень нужно его модуль возвысить в эту степень и аргумент умножить на показатель степени.*

Полагая в формуле (11) $r = 1$, получаем формулу Моавра:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{12}$$

Примеры. 1. Разлагая левую часть равенства (12) по формуле бинома Ньютона и приравнивая вещественные и мнимые части согласно условию (2), получим выражения для $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ через степени $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$: [1])

$$\begin{aligned}\cos n\varphi = {} & \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \\ & + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi + \ldots + (-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\varphi\sin^{2k}\varphi + \\ & + \ldots + \begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\varphi & (n \text{ — четное})\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi & (n \text{ — нечетное});\end{cases}\\ \sin n\varphi = {} & \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi - \ldots + \\ & + (-1)^k\binom{n}{2k+1}\cos^{n-2k-1}\varphi\sin^{2k+1}\varphi + \ldots + \\ & + \ldots + \begin{cases}(-1)^{\frac{n-2}{2}} n\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi & (n \text{ — четное})\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n\varphi & (n \text{ — нечетное}).\end{cases}\end{aligned} \tag{13}$$

---

[1]) Символом $\binom{n}{m}$ мы обозначаем число сочетаний из n элементов по m, т. е.

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\ldots m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

В частности, при $n=3$ формула (12) после раскрытия скобок будет иметь вид:

$$\cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi,$$

откуда

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi; \quad \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

2. Просуммируем выражения:

$$A_n = 1 + r\cos\varphi + r^2\cos 2\varphi + \ldots + r^{n-1}\cos(n-1)\varphi,$$
$$B_n = r\sin\varphi + r^2\sin 2\varphi + \ldots + r^{n-1}\sin(n-1)\varphi.$$

Положим:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и составим комплексное число:

$$A_n + B_n i = 1 + r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \ldots + r^{n-1}[\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi]$$

Пользуемся равенством (11) и формулой для суммы геометрической прогрессии:

$$A_n + B_n i = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1-r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n}{1-r\ (\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{(1-r^n\cos n\varphi) - ir^n\sin n\varphi}{(1-r\cos\varphi) - ir\sin\varphi}.$$

Умножая числитель и знаменатель последней дроби на величину $(1-r\cos\varphi)+ir\sin\varphi$, сопряженную со знаменателем, получим:

$$A_n + B_n i = \frac{[(1-r^n\cos n\varphi) - ir^n\sin n\varphi]\,[(1-r\cos\varphi) + ir\sin\varphi]}{(1-r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi} =$$
$$= \frac{(1-r^n\cos n\varphi)(1-r\cos\varphi) + r^{n+1}\sin\varphi\sin n\varphi}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1} +$$
$$+ \frac{(1-r^n\cos n\varphi)\,r\sin\varphi - (1-r\cos\varphi)\,r^n\sin n\varphi}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1}\,i =$$
$$= \frac{r^{n+1}\cos(n-1)\varphi - r^n\cos n\varphi - r\cos\varphi + 1}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1} +$$
$$+ \frac{r^{n+1}\sin(n-1)\varphi - r^n\sin n\varphi + r\sin\varphi}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1}\,i.$$

Приравнивая вещественные и мнимые части согласно условию (2), будем иметь:

$$A_n = 1 + r\cos\varphi + r^2\cos 2\varphi + \ldots + r^{n-1}\cos(n-1)\varphi = \frac{r^{n+1}\cos(n-1)\varphi - r^n\cos n\varphi - r\cos\varphi + 1}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1};$$
$$B_n = r\sin\varphi + r^2\sin 2\varphi + \ldots + r^{n-1}\sin(n-1)\varphi = \frac{r^{n+1}\sin(n-1)\varphi - r^n\sin n\varphi + r\sin\varphi}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1}.$$

Считая, что абсолютное значение вещественного числа r меньше единицы, и беспредельно увеличивая n, получим в пределе суммы бесконечных рядов:

$$\left.\begin{aligned} 1+r\cos\varphi+r^2\cos 2\varphi+\ldots&=\frac{1-r\cos\varphi}{r^2-2r\cos\varphi+1},\\ r\sin\varphi+r^2\sin 2\varphi+\ldots&=\frac{r\sin\varphi}{r^2-2r\cos\varphi+1}.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

В выражениях A_n и B_n положим $r=1$, тогда получим:

$$1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ldots+\cos(n-1)\varphi=\frac{\cos(n-1)\varphi-\cos n\varphi-\cos\varphi+1}{2(1-\cos\varphi)}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi+2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi+\sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{(n-1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}. \tag{15_1}$$

Аналогичным образом получим:

$$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots+\sin(n-1)\varphi=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n-1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}. \tag{15_2}$$

175. Извлечение корня. *Корнем n-й степени из комплексного числа называется такое комплексное число, n-я степень которого равна подкоренному числу.*

Таким образом, равенство:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$$

равносильно равенству:

$$\rho^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Но у равных комплексных чисел модули должны быть равны, и аргументы могут отличаться лишь кратным 2π, т. е.

$$\rho^n=r,\quad n\psi=\varphi+2k\pi,$$

откуда

$$\rho=\sqrt[n]{r},\quad \psi=\frac{\varphi+2k\pi}{n},$$

где $\sqrt[n]{r}$ есть арифметическое значение корня и k — любое целое число. Таким образом, мы получаем:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \tag{16}$$

т. е. *для извлечения корня из комплексного числа надо извлечь корень из его модуля, а аргумент разделить на показатель корня.*

В формуле (16) число k может принимать всевозможные целые значения; однако можно показать, что различных значений корня будет только n, и они будут соответствовать значениям:

$$k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ (n-1). \tag{17}$$

Чтобы доказать это, заметим, что правые части в формуле (16) будут различными при двух различных значениях $k = k_1$ и $k = k_2$ тогда, когда аргументы $\frac{\varphi + 2k_1\pi}{n}$ и $\frac{\varphi + 2k_2\pi}{n}$ отличаются не кратным 2π, и будут одинаковыми, если указанные аргументы отличаются кратным 2π.

Но разность $(k_1 - k_2)$ двух чисел из ряда (17) по абсолютному значению меньше n, а потому разность

$$\frac{\varphi + 2k_1\pi}{n} - \frac{\varphi + 2k_2\pi}{n} = \frac{k_1 - k_2}{n}\, 2\pi$$

не может быть кратна 2π, т. е. n значениям k из ряда (17) соответствуют n различных значений корня.

Пусть теперь k_2 — целое число (положительное или отрицательное), не заключающееся в ряде (17). Мы можем представить его в виде:

$$k_2 = qn + k_1,$$

где q — целое число и k_1 — одно из чисел ряда (17), а потому

$$\frac{\varphi + 2k_2\pi}{n} = \frac{\varphi + 2k_1\pi}{n} + 2\pi q,$$

т. е. значению k_2 соответствует то же значение корня, что и значению k_1, заключающемуся в ряде (17). Итак, *корень n-й степени из комплексного числа имеет n различных значений.*

Исключение из этого правила представляет лишь частный случай, когда подкоренное число равно нулю, т. е. $r = 0$. В этом случае все указанные выше значения корня равны нулю.

Примеры. 1. Определим все значения $\sqrt[3]{i}$. Модуль i равен единице и аргумент $\frac{\pi}{2}$, а потому:

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \quad (k = 0,\ 1,\ 2).$$

Мы получаем следующие три значения для $\sqrt[3]{i}$:

$$\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; \qquad \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i;$$

$$\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

2. Рассмотрим все значения $\sqrt[n]{1}$, т. е. все решения двучленного уравнения:

$$z^n = 1.$$

Модуль единицы равен единице и аргумент — нулю, а потому

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Обозначим буквой ε то значение этого корня, которое получается при $k = 1$:

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Согласно формуле Моавра:

$$\varepsilon^k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n},$$

т. е. все корни уравнения $z^n = 1$ имеют вид:

$$\varepsilon^k \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

причем надо считать $\varepsilon^0 = 1$.

Рассмотрим теперь двучленное уравнение вида:

$$z^n = a.$$

Вместо z введем новое неизвестное u, полагая

$$z = u \sqrt[n]{a},$$

где $\sqrt[n]{a}$ есть одно из значений корня n-й степени из a.

Подставляя выражение для z в данное уравнение, получим для u уравнение:

$$u^n = 1.$$

Отсюда видно, что все корни уравнения $z^n = a$ могут быть представлены в виде:

$$\sqrt[n]{a}\,\varepsilon^k \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

где $\sqrt[n]{a}$ — одно из n значений этого корня и ε^k принимает все значения корня n-й степени из единицы.

176. Показательная функция. Мы рассматривали раньше показательную функцию e^x в случае вещественного показателя x. Обобщим теперь понятие о показательной функции на случай любого комплексного показателя. При вещественном показателе функция e^x может быть представлена в виде ряда [**129**]:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Определим аналогичным рядом показательную функцию и в случае чисто мнимого показателя, т. е. *положим:*

$$e^{yi} = 1 + \frac{yi}{1!} + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \ldots$$

Отделяя вещественные и мнимые члены, имеем отсюда:

$$e^{yi} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots\right),$$

откуда, вспомнив разложения $\cos y$ и $\sin y$ в ряд [130], определяем:

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y. \tag{18}$$

Эта формула и определяет показательную функцию при чисто мнимом показателе.

Заменяя y на $(-y)$:

$$e^{-yi} = \cos y - i \sin y \tag{19}$$

и решая уравнения (18) и (19) относительно $\cos y$ и $\sin y$, получим формулы Эйлера, выражающие тригонометрические функции через показательные с чисто мнимым показателем:

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}; \quad \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}. \tag{20}$$

Формула (18) дает новую *показательную форму комплексного числа*, имеющего модуль r и аргумент φ:

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{\varphi i}.$$

Показательную функцию при любом комплексном показателе $x + yi$ определяем формулой:

$$e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y), \tag{21}$$

т. е. *модуль числа* e^{x+yi} *будем считать равным* e^x, *а аргумент равным* y.

Нетрудно обобщить на случай комплексных показателей *правило сложения показателей при умножении*.

Пусть $z = x + yi$ и $z_1 = x_1 + y_1 i$:

$$e^z \cdot e^{z_1} = e^x (\cos y + i \sin y) \cdot e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1),$$

или, применяя правило умножения комплексных чисел [172]:

$$e^z \cdot e^{z_1} = e^{x+x_1} [\cos (y + y_1) + i \sin (y + y_1)].$$

Но выражение, стоящее в правой части этого равенства, согласно определению (21), представляет собою:

$$e^{(x+x_1) + (y+y_1)i}, \quad \text{т. е.} \quad e^{z+z_1}.$$

Правило вычитания показателей при делении

$$\frac{e^z}{e^{z_1}} = e^{z-z_1}$$

может быть непосредственно проверено путем умножения частного на делитель.

В случае целого положительного n будем иметь:

$$(e^z)^n = e^z e^z \ldots e^z = e^{nz}.$$

Пользуясь формулами Эйлера, мы сможем выразить любую целую положительную степень $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, а также и произведение таковых степеней, в виде суммы членов, содержащих лишь первые степени синуса или косинуса кратных дуг:

$$\sin^m\varphi=\frac{(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i})^m}{2^m i^m};\quad \cos^m\varphi=\frac{(e^{\varphi i}+e^{-\varphi i})^m}{2^m}. \tag{22}$$

Разложив правые части этих равенств по формуле бинома Ньютона, перемножив их и приведя в полученных разложениях показательные функции к тригонометрическим, согласно формулам (18) и (19), мы получаем искомое выражение.

Примеры. 1.

$$\cos^4\varphi=\frac{(e^{\varphi i}+e^{-\varphi i})^4}{16}=\frac{e^{4\varphi i}}{16}+\frac{4e^{2\varphi i}}{16}+\frac{6}{16}+\frac{4e^{-2\varphi i}}{16}+\frac{e^{-4\varphi i}}{16}=$$
$$=\frac{1}{8}\,\frac{e^{4\varphi i}+e^{-4\varphi i}}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{e^{2\varphi i}+e^{-2\varphi i}}{2}+\frac{3}{8}=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{8}\cos 4\varphi.$$

2.

$$\sin^4\varphi\cos^3\varphi=\frac{(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i})^4}{16}\cdot\frac{(e^{\varphi i}+e^{-\varphi i})^3}{8}=\frac{(e^{2\varphi i}-e^{-2\varphi i})^3\,(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i})}{128}=$$
$$=\frac{(e^{6\varphi i}-3e^{2\varphi i}+3e^{-2\varphi i}-e^{-6\varphi i})\,(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i})}{128}=$$
$$=\frac{e^{7\varphi i}-e^{5\varphi i}-3e^{3\varphi i}+3e^{\varphi i}+3e^{-\varphi i}-3e^{-3\varphi i}-e^{-5\varphi i}+e^{-7\varphi i}}{128}=$$
$$=\frac{3}{64}\cos\varphi-\frac{3}{64}\cos 3\varphi-\frac{1}{64}\cos 5\varphi-\frac{1}{64}\cos 7\varphi.$$

Заметим при этом, что любая целая степень $\cos\varphi$ и четная степень $\sin\varphi$ представляют собою четные функции φ, т. е. не меняют своей величины при замене φ на $(-\varphi)$, и выражение таких четных функций φ будет содержать лишь косинусы кратных дуг. Если же функция есть нечетная функция φ, т. е. если эта функция меняет знак при замене φ на $(-\varphi)$, как это будет иметь, например, место в случае нечетной степени $\sin\varphi$, то разложение такой функции будет содержать лишь синусы кратных дуг, и свободный член в этом разложении будет наверное отсутствовать. Все эти обстоятельства будут нами выяснены более подробно при изложении тригонометрических рядов.

177. Тригонометрические и гиперболические функции. До сих пор мы рассматривали тригонометрические функции лишь в случае вещественного аргумента. Определим тригонометрические функции при любом комплексном аргументе z по формулам Эйлера:

$$\cos z=\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2};\quad \sin z=\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i},$$

причем выражения, стоящие справа, при любом комплексном z имеют смысл, указанный в [176].

Пользуясь этими формулами и основными свойствами показательной функции, нетрудно проверить справедливость формул тригонометрии

в случае комплексного аргумента. Предлагаем читателю в качестве упражнения доказать, например, соотношения:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1;$$
$$\sin(z + z_1) = \sin z \cos z_1 + \cos z \sin z_1;$$
$$\cos(z + z_1) = \cos z \cos z_1 - \sin z \sin z_1.$$

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются по формулам:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2zi} - 1}{e^{2zi} + 1};$$
$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{zi} + e^{-zi}}{e^{zi} - e^{-zi}} = i\,\frac{e^{2zi} + 1}{e^{2zi} - 1}.$$

Введем теперь *гиперболические функции*.

Гиперболические синус и косинус определяются по формулам:

$$\operatorname{sh} z = \frac{\sin iz}{i} = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2};$$
$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1};$$
$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}.$$

Пользуясь этими формулами, нетрудно проверить, например, следующие соотношения:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1; \\ \operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2; \\ \operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2; \\ \operatorname{sh} 2z = 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z; \\ \operatorname{th} 2z = \dfrac{2 \operatorname{th} z}{1 + \operatorname{th}^2 z}, \quad \operatorname{cth} 2z = \dfrac{1 + \operatorname{cth}^2 z}{2 \operatorname{cth} z}. \end{array}\right\} \quad (23)$$

Таким образом возникает *гиперболическая тригонометрия* с формулами, аналогичными формулам обычной тригонометрии круга. Заменяя в формуле обычной тригонометрии $\sin z$ на $i \operatorname{sh} z$ и $\cos z$ на $\operatorname{ch} z$, получим аналогичную формулу гиперболической тригонометрии. Это обстоятельство вытекает непосредственно из формул, определяющих гиперболические функции.

Пользуясь этим указанием, нетрудно получить следующие формулы приведения суммы гиперболических функций к логарифмическому виду:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sh} z_1 + \operatorname{sh} z_2 &= 2 \operatorname{sh} \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{ch} \frac{z_1 - z_2}{2}; \\ \operatorname{sh} z_1 - \operatorname{sh} z_2 &= 2 \operatorname{sh} \frac{z_1 - z_2}{2} \operatorname{ch} \frac{z_1 + z_2}{2}; \\ \operatorname{ch} z_1 + \operatorname{ch} z_2 &= 2 \operatorname{ch} \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{ch} \frac{z_1 - z_2}{2}; \\ \operatorname{ch} z_1 - \operatorname{ch} z_2 &= 2 \operatorname{sh} \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{sh} \frac{z_1 - z_2}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Рассмотрим теперь гиперболические функции при вещественных значениях аргумента:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}; \quad \operatorname{cth} x = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

График функции $y = \operatorname{ch} x$ представляет собой цепную линию [78], к более подробному изучению которой мы перейдем в [178].

Графики функций $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ изображены на черт. 171.

Черт. 171.

Непосредственно дифференцируя, получаем следующие выражения производных:

$$\frac{d \operatorname{sh} x}{dx} = \operatorname{ch} x; \quad \frac{d \operatorname{ch} x}{dx} = \operatorname{sh} x;$$

$$\frac{d \operatorname{th} x}{dx} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad \frac{d \operatorname{cth} x}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Отсюда получаем таблицу интегралов:

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

Самое название „гиперболические функции“ произошло вследствие

того, что функции $\operatorname{ch} t$ и $\operatorname{sh} t$ играют ту же роль для параметрического представления *равнобочной гиперболы*:

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

какую функции $\cos t$ и $\sin t$ — для окружности

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Параметрическое представление окружности есть

$$x = a\cos t; \quad y = a\sin t,$$

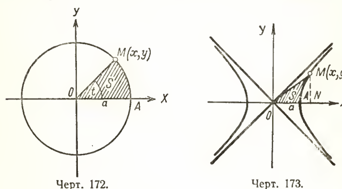
равнобочной же гиперболы:

$$x = a\operatorname{ch} t; \quad y = a\operatorname{sh} t,$$

как в этом нетрудно убедиться при помощи соотношения:

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1.$$

Геометрическое значение параметра t в обоих случаях, окружности и гиперболы, также одинаково. Если мы обозначим через S



Черт. 172. Черт. 173.

площадь сектора AOM (черт. 172), а через S_0 площадь всего круга ($S_0 = \pi a^2$), то, очевидно:

$$t = 2\pi\frac{S}{S_0}.$$

Пусть теперь S обозначает площадь аналогичного сектора равнобочной гиперболы (черт. 173). Мы имеем:

$$S = \text{пл. } OMN - \text{пл. } AMN = \frac{1}{2}xy - \int_a^x y\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2}\,dx.$$

Вычисляя интеграл по формуле из [92], находим:

$$S=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]_a^x=$$
$$=\frac{1}{2}a^2\log\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right).$$

Если теперь, обозначая опять через S_0 площадь круга, положим

$$t=2\pi\frac{S}{S_0}=\log\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right),$$

то найдем без труда:

$$e^t=\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1},$$
$$e^{-t}=\frac{1}{\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}=\frac{x}{a}-\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1},$$

откуда, складывая почленно и умножая на $\frac{a}{2}$:

$$x=\frac{a}{2}(e^t+e^{-t})=a\operatorname{ch}t,$$
$$y=\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\operatorname{ch}^2t-a^2}=a\operatorname{sh}t,$$

т. е. мы и получаем параметрическое представление равнобочной гиперболы.

178. Цепная линия. Исследуем кривую провисания гибкой однородной тяжелой нити, подвешенной на концах A_1 и A_2 (черт. 174).

В плоскости этой кривой направим ось OX горизонтально, ось OY вертикально вверх. Выделим элементы $MM_1=ds$ нити. На каждый из них действуют натяжения T и T_1 от оставшихся частей нити и вес элемента. Натяжения приложены в концах M и M_1 элемента и направлены по касательным (причем T — по отрицательному, T_1 — по положительному направлению касательной). Вес мы можем принять пропорциональным длине элемента:

$$dp=\rho\,ds,$$

где ρ — линейная плотность нити (вес погонной единицы длины).

Для равновесия необходимо и достаточно, чтобы равнялась нулю сумма проекций действующих на элемент сил как на горизонтальное, так и на вертикальное направление. Так как проекция веса элемента ds на горизонтальное направление равна нулю, то горизонтальные составляющие сил T и T_1 должны быть равны по величине и противоположны по знаку. Обозначим через T_0 общую величину их горизонтальной составляющей.

Далее, из чертежа мы получаем для вертикальных составляющих натяжений соответственно выражения:

$$-T_0\operatorname{tg}\alpha=-T_0y' \quad \text{и} \quad T_0\operatorname{tg}(\alpha+d\alpha)=T_0(y'+dy').$$

Здесь $d\alpha$ — прирост угла α, образованного касательной с осью OX, при перемещении из точки M в точку M_1, и dy' — соответствующее приращение углового коэффициента касательной, т. е. величины $\operatorname{tg}\alpha$.

Приравнивая нулю сумму проекций T, T_1 и силы веса $\rho\, ds$ на ось OY, получим:

$$T_0(y' + dy') - T_0 y' - \rho\, ds = 0,$$

т. е.

$$T_0\, dy' = \rho\, ds,$$

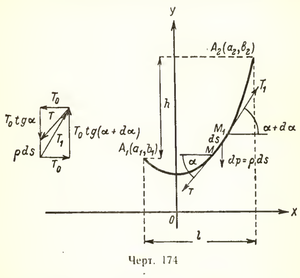
что можно написать так:

$$T_0\, dy' = \rho \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{25}$$

Переменные здесь разделяются [93]:

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dx}{k}, \quad \text{где } k = \frac{T_0}{\rho};$$

заметим, что k есть постоянная, прямо пропорциональная горизонтальной



Черт. 174

составляющей натяжения и обратно пропорциональная линейной плотности нити.

Интегрируем полученное уравнение:

$$\lg(y' + \sqrt{1+y'^2}) = \frac{x + C_1}{k},$$

откуда

$$e^{\frac{x+C_1}{k}} = y' + \sqrt{1+y'^2};$$

чтобы определить y', введем обратную величину:

$$e^{-\frac{x+C_1}{k}} = \frac{1}{y' + \sqrt{1+y'^2}} = \sqrt{1+y'^2} - y'.$$

Вычитая почленно это равенство из предыдущего, находим:

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x+C_1}{k}} - e^{-\frac{x+C}{k}}\right).$$

Интегрируя еще раз, получим уравнение искомой кривой нити:

$$y+C_2=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x+C_1}{k}}+e^{-\frac{x+C_1}{k}}\right). \tag{26}$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из условия, что кривая проходит через точки $A_1(a_1, b_1)$ и $A_2(a_2, b_2)$. Однако в приложениях наибольший интерес представляет не само уравнение кривой провисания, т. е. постоянные C_1 и C_2, а соотношение между горизонтальным и вертикальным расстояниями точек подвеса и длиной дуги A_1A_2.

При исследовании зависимости между этими тремя величинами мы можем, конечно, совершить параллельный перенос координатных осей. Поместив начало в точку $(-C_1, -C_2)$, мы можем считать, что в уравнении (26) $C_1 = C_2 = 0$ и это уравнение заменится более простым:

$$y=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)=k\operatorname{ch}\frac{x}{k}, \tag{26_1}$$

откуда ясно, что *кривая провисания есть цепная линия.*

Пусть при указанном выборе координатных осей точка подвеса A_1 имеет координаты (a_1, b_1) и A_2 — координаты (a_2, b_2). Обозначив через l, h, s горизонтальное и вертикальное расстояния точек подвеса и длину нити, будем иметь:

$$l=a_2-a_1;\qquad h=b_2-b_1=k\left(\operatorname{ch}\frac{a_2}{k}-\operatorname{ch}\frac{a_1}{k}\right),$$

$$s=\int_{a_1}^{a_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{a_1}^{a_2}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{k}}\,dx=\int_{a_1}^{a_2}\operatorname{ch}\frac{x}{k}\,dx=k\left(\operatorname{sh}\frac{a_2}{k}-\operatorname{sh}\frac{a_1}{k}\right).$$

По формулам (24) находим:

$$h=2k\operatorname{sh}\frac{a_2+a_1}{2k}\operatorname{sh}\frac{a_2-a_1}{2k}=2k\operatorname{sh}\frac{l}{2k}\operatorname{sh}\frac{a_2+a_1}{2k},$$

$$s=2k\operatorname{sh}\frac{a_2-a_1}{2k}\operatorname{ch}\frac{a_2+a_1}{2k}=2k\operatorname{sh}\frac{l}{2k}\operatorname{ch}\frac{a_2+a_1}{2k},$$

откуда на основании первого из соотношений (23):

$$s^2-h^2=4k^2\operatorname{sh}^2\frac{l}{2k},$$

что и дает искомую зависимость между l, h и s.

Ее можно переписать в следующей форме:

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{l}{2k}}{\frac{l}{2k}}=\frac{\sqrt{s^2-h^2}}{l}. \tag{27}$$

Если точки подвеса и длина нити заданы, то величины l, h и s известны, и мы получаем уравнение для определения параметра k, или, если линейная плотность ρ нити также известна, то уравнение (27) может служить для определения горизонтальной составляющей натяжения T_0.

Положим для сокращения письма:

$$\frac{l}{2k}=\xi;\qquad \frac{\sqrt{s^2-h^2}}{l}=c.$$

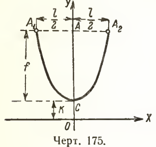
Уравнение (27) превратится в

$$\frac{\operatorname{sh}\xi}{\xi}=c. \tag{27_1}$$

Вспомнив разложение показательной функции в степенной ряд [129], найдем:

$$\frac{\operatorname{sh}\xi}{\xi}=\frac{e^{\xi}-e^{-\xi}}{2\xi}=1+\frac{\xi^2}{3!}+\frac{\xi^4}{5!}+\frac{\xi^6}{7!}+\ldots,$$

откуда видно, что при возрастании ξ от 0 до $+\infty$, отношение также постоянно возрастает от 1 до $+\infty$. Стало быть, при всяком заданном значении $c \geqslant 1$ уравнение (27_1) имеет один положительный корень, который можно вычислить, пользуясь таблицами гиперболических функций.[1]) Данные величины l, h и s должны при этом удовлетворять условию:



Черт. 175.

$$c=\frac{\sqrt{s^2-h^2}}{l}\geqslant 1 \quad \text{или} \quad s^2\geqslant h^2+l^2,$$

которое очевидно и из геометрических соображений, так как $\sqrt{h^2+l^2}$ есть хорда A_1A_2, а s — дуга цепной линии между теми же точками.

Пусть, например:

$$s=100\ \text{м},\quad l=50\ \text{м},\quad h=20\ \text{м},\quad \rho=20\ \text{кг/м},$$

мы получим:

$$c=0{,}02\sqrt{10\,000-400}=0{,}8\cdot\sqrt{6}=1{,}96$$

и по таблицам найдем корень уравнения (27_1):

$$\xi=\frac{l}{2k}=2{,}15,$$

откуда

$$T_0=k\rho=\frac{l}{2\xi}\rho=\frac{50}{2\cdot 2{,}15}\cdot 20=232\ \text{кг}.$$

Пусть точки подвеса находятся на одинаковой высоте. Исследуем стрелу провисания нити f (черт. 175):

$$f=\overline{OA}-\overline{OC}=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{l}{2k}}+e^{-\frac{l}{2k}}\right)-k=\frac{k}{2}\left(e^{\frac{l}{2k}}+e^{-\frac{l}{2k}}-2\right).$$

Разлагая показательную функцию в ряд, получим:

$$f=\frac{1}{2!}\,\frac{l^2}{2^2\cdot k}+\frac{1}{4!}\,\frac{l^4}{2^4\cdot k^3}+\ldots \tag{28}$$

Точно так же будем иметь для $s=$ дуге A_1A_2 [формула (27) при $h=0$]:

$$s=2k\operatorname{sh}\frac{l}{2k}=k\left(e^{\frac{l}{2k}}-e^{-\frac{l}{2k}}\right)=l+\frac{1}{3!}\,\frac{l^3}{2^2\cdot k^2}+\frac{1}{5!}\,\frac{l^5}{2^4\cdot k^4}+\ldots \tag{29}$$

[1]) Например, таблицы Янке и Эмде.

Ограничиваясь в ряде (28) одним слагаемым, определим приближенно k:

$$k \approx \frac{l^2}{8f}.$$

В разложении (29) удержим первые два слагаемых и подставим найденное для k выражение:

$$s \approx l + \frac{8}{3}\,\frac{f^2}{l}.$$

Дифференцируя это соотношение, получим *зависимость между удлинением нити и увеличением стрелы провисания:*

$$ds \approx \frac{16}{3}\,\frac{f\,df}{l}, \quad \text{или} \quad df \approx \frac{3l}{16f}\,ds.$$

Уравнение (25) было нами получено в предположении, что на всякий элемент нити действует сила тяжести, пропорциональная длине элемента. В некоторых случаях, например при рассмотрении цепей висячих мостов, эту силу тяжести надо считать пропорциональной длине не самого элемента, но его проекции на горизонтальную ось. Это случится тогда, когда нагрузка от настила моста настолько велика по сравнению с собственным весом цепи, что последней можно пренебречь. В этом случае вместо уравнения (25) будем иметь:

$$T_0\,dy' = \rho\,dx,$$

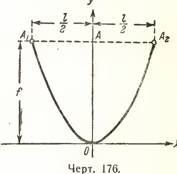
откуда

$$y' = \frac{\rho}{T_0}\,x + C_1$$

и

$$y = \frac{\rho}{2T_0}\,x^2 + C_1 x + C_2,$$

т. е. *кривая провисания будет параболой.*



Черт. 176.

Положим, что концы нити A_1 и A_2 находятся на одинаковой высоте, и поместим начало координат в вершину параболы (черт. 176), так что уравнение ее будет:

$$y = \alpha x^2 \qquad \left(\alpha = \frac{\rho}{2T_0}\right).$$

Как и выше, определим длину пролета $l = \overline{A_1A_2}$ и стрелу прогиба $f = OA$. Из уравнения параболы получим:

$$f = \alpha\,\frac{l^2}{4},$$

откуда

$$\alpha = \frac{4f}{l^2}.$$

Вычислим длину дуги A_1A_2, равную удвоенной дуге OA_2:

$$s = 2\int\limits_0^{\frac{l}{2}} \sqrt{1 + 4\alpha^2 x^2}\,dx.$$

По формуле бинома Ньютона имеем:

$$\sqrt{1 + 4\alpha^2 x^2} = (1 + 4\alpha^2 x^2)^{1/2} = 1 + 2\alpha^2 x^2 - 2\alpha^4 x^4 + \ldots$$

и, интегрируя, находим разложение для s:

$$s = l + \frac{1}{6}\alpha^2 l^3 - \frac{1}{40}\alpha^4 l^5 + \ldots$$

Подставим вместо α найденное выше его выражение:

$$s = l + \frac{8}{3}\left(\frac{f}{l}\right)^2 l - \frac{32}{5}\left(\frac{f}{l}\right)^4 l + \ldots = l\left[1 + \frac{8}{3}\varepsilon^2 - \frac{32}{5}\varepsilon^4 + \ldots\right],$$

где $\varepsilon = \frac{f}{l}$. Ограничиваясь в написанном разложении двумя первыми слагаемыми, получим приближенную формулу:

$$s \approx l + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l},$$

совпадающую с аналогичной формулой для цепной линии.

179. Логарифмирование. *Натуральным логарифмом комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется показатель степени, в которую надо возвысить e, чтобы получить логарифмируемое число.* Обозначив натуральный логарифм символом Log, можем сказать, что равенство

$$\mathrm{Log}\,[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = x + yi$$

равносильно следующему:

$$e^{x+yi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Последнее равенство можно написать так:

$$e^x(\cos y + i\sin y) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

откуда, сравнивая модули и аргументы, получим:

$$e^x = r, \quad y = \varphi + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

т. е.

$$x = \log r \quad \text{и} \quad x + yi = \log r + (\varphi + 2k\pi)i$$

и окончательно:

$$\mathrm{Log}\,[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \log r + (\varphi + 2k\pi)i, \qquad (30)$$

т. е. *натуральный логарифм комплексного числа равен комплексному числу, вещественная часть которого есть обычный логарифм модуля, а мнимая часть представляет собою произведение i на одно из значений аргумента.*

Мы видим, таким образом, что натуральный логарифм любого числа имеет бесчисленное множество значений. Исключение составляет лишь нуль, логарифм которого не существует. Если мы подчиним значение аргумента неравенству

$$-\pi < \varphi \leqslant \pi,$$

то получим так называемое *главное значение логарифма*. Для отличия главного значения логарифма от общего ёго значения, даваемого формулой (30), пользуются для главного значения обозначением log вместо Log, так что

$$\log[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \log r + \varphi i, \tag{31}$$

где $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

С помощью логарифма определим *комплексную степень любого комплексного числа*. Если u и v — два комплексных числа, причем $u \neq 0$, то положим:

$$u^v = e^{v \operatorname{Log} u}.$$

Заметим, что $\operatorname{Log} u$, а потому и u^v имеют, вообще говоря, бесчисленное множество значений.

Примеры. 1. Модуль i равен единице и аргумент $\frac{\pi}{2}$, а потому

$$\operatorname{Log} i = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

2. Определим i^i:

$$i^i = e^{i \operatorname{Log} i} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

180. Синусоидальные величины и векторные диаграммы. Укажем на применение комплексных величин при изучении гармонических колебаний. Рассмотрим переменный ток, сила которого j в каждый момент времени имеет во всей цепи одно и то же значение, определяемое по формуле:

$$j = j_m \sin(\omega t + \varphi), \tag{32}$$

где t — время, а j_m, ω и φ — постоянные.

Постоянная j_m, которую мы будем считать положительной, называется *амплитудой;* постоянная ω называется *частотой* и связана *с периодом* T соотношением

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

постоянная φ называется *фазой* переменного тока.

Ток, сила которого определяется по формуле (32) называется *синусоидальным*. Сказанное применяется и для напряжения:

$$v = v_m \sin(\omega t + \varphi_1), \tag{33}$$

и в дальнейшем мы будем рассматривать силы тока и напряжения, изменяющиеся по синусоидальному закону, определяемому формулами (32) и (33).

Существует простое геометрическое изображение синусоидальных величин одной и той же частоты. Через некоторую точку O плоскости проводим луч, который мы будем вращать с угловой скоростью ω по часовой стрелке; этот луч назовем *осью времени*.

Пусть начальное положение оси времени при $t = 0$ совпадает с осью OX.

Построим вектор $\overline{OA}$ (черт. 177) длины j_m, который образует угол φ с начальным положением оси времени (напомним, что положительным направлением отсчета углов мы считаем направление против часовой стрелки).

В момент t вектор $\overline{OA}$ будет образовывать угол $(\varphi + \omega t)$ с осью времени, повернувшейся на угол ωt; проекция вектора $\overline{OA}$ на направление, перпендикулярное оси времени и получающееся поворотом ее на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, или, короче говоря, взятая с надлежащим знаком длина перпендикуляра, опущенного из конца вектора $\overline{OA}$ на ось времени, и дает нам, очевидно, величину $j = j_m \sin(\omega t + \varphi)$.

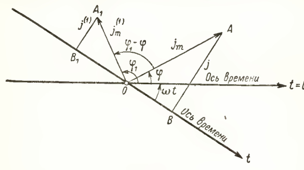
Для изображения другой синусоидальной величины того же периода

$$j^{(1)} = j_m^{(1)} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

надо будет отложить вектор длины $j_m^{(1)}$, образующий с первым вектором угол

$$\psi = \varphi_1 - \varphi.$$

Таким образом, при помощи неподвижных векторов на плоскости мы можем изображать синусоидальные величины одной и той же частоты. Длина



Черт. 177.

всякого вектора дает амплитуду соответствующей величины, а угол между двумя векторами представляет собой разность фаз соответствующих этим векторам величин. Построенные указанным образом векторы дают так называемую *векторную диаграмму* системы синусоидальных величин одного и того же периода.

Геометрическая сумма нескольких векторов векторной диаграммы, согласно теореме о проекции замыкающей, будет соответствовать синусоидальной величине того же периода, равной *сумме синусоидальных величин*, соответствующих слагаемым векторам.

Пользуясь определением умножения, приведенным в [172], можно придать операциям с векторными диаграммами удобный аналитический вид.

В дальнейшем мы будем обозначать векторы теми же буквами, но жирным шрифтом.

Произведение вектора $\mathbf{j}$ *на комплексное число* $re^{\varphi i}$ *будем считать равным вектору, который получается из вектора* $\mathbf{j}$, *если его длину умножить на* r *и повернуть его на угол* φ, т. е. будем считать, что произведение $re^{\varphi i} j_{ex}$ получается согласно приведенному в [172] правилу умножения комплексного числа, изображающего вектор $\mathbf{j}$, на комплексное число $re^{\varphi i}$.

Если комплексное число $re^{\varphi i}$ написать в виде $(a + bi)$, то произведение можно представить в виде суммы двух векторов:

$$(a + bi)\,\mathbf{j} = a\mathbf{j} + bi\mathbf{j},$$

причем первое слагаемое есть вектор, параллельный вектору $\mathbf{j}$, а второе слагаемое есть вектор, перпендикулярный вектору $\mathbf{j}$.

Разлагая какой-либо вектор $\mathbf{j}_1$ на два взаимно перпендикулярных направления, можем представить его в виде:

$$\mathbf{j}_1 = a\mathbf{j} + bi\mathbf{j} = (a + bi)\,\mathbf{j}.$$

При этом $|a + bi|$ равно, очевидно, отношению длин векторов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{j}_1$, а аргумент числа $(a + bi)$ представляет собой угол, образованный вектором $\mathbf{j}_1$ с вектором $\mathbf{j}$. Этот угол дает разность фаз величин, соответствующих векторам $\mathbf{j}_1$ и $\mathbf{j}$.

Введем понятие *о среднем квадратичном* значении синусоидальной величины (32), которое мы обозначим символом $M(j^2)$. Оно определяется равенством:

$$M(j^2) = \frac{1}{T}\int_0^T j^2\,dt.$$

Интегрируя выражение

$$j^2 = j_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}\,j_m^2 - \frac{1}{2}\,j_m^2 \cos 2(\omega t + \varphi)$$

в пределах от 0 до $T = \frac{2\pi}{\omega}$, получим:

$$M(j^2) = \frac{1}{2}\,j_m^2 - \left[\frac{1}{4\omega}\,j_m^2 \sin 2(\omega t + \varphi)\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{1}{2}\,j_m^2.$$

Корень квадратный из среднего квадратичного значения называется *эффективным*, или *действующим, значением величины:*

$$j_{eff} = \sqrt{M(j^2)} = \frac{j_m}{\sqrt{2}}.$$

На практике при построении векторных диаграмм обычно принимают длину вектора равной не амплитуде, а эффективному значению величины, т. е. по сравнению с описанным выше построением длины векторов уменьшают в отношении $1:\sqrt{2}$.

Дифференцируя формулу (32), получим:

$$\frac{dj}{dt} = \omega j_m \cos(\omega t + \varphi) = \omega j_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

т. е. производная $\frac{d\mathbf{j}}{dt}$ отличается от j лишь тем, что амплитуда умножается на ω и к фазе прибавляется $\frac{\pi}{2}$.

Выведенное соотношение в векторных обозначениях напишется так:

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \omega i\mathbf{j}. \tag{34}$$

Интегрируя формулу (32) и отбрасывая произвольную постоянную, что необходимо делать, если мы желаем получить также синусоидальную величину

того же периода, имеем:

$$\int j\,dt = -\frac{1}{\omega} j_m \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{\omega} j_m \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда следует: [1])

$$\int \mathbf{j}\,dt = \frac{1}{\omega i}\,\mathbf{j}. \qquad (35)$$

181. Примеры. 1. Рассмотрим цепь переменного тока, в которую введены последовательно: сопротивление R, самоиндукция L и емкость C. Обозначив через v напряжение и через j силу тока, будем иметь известное из физики соотношение:

$$v = Rj + L\frac{dj}{dt} + \frac{1}{C}\int j dt.$$

Ограничимся пока только явлениями *установившимися* и притом тем случаем, когда и напряжение и сила тока оказываются синусоидальными величинами одного и того же периода. Предыдущее уравнение можно переписать в векторной форме, введя вместо v и j *векторы* напряжения и тока $\mathbf{v}$ и $\mathbf{j}$:

$$\mathbf{v} = R\mathbf{j} + L\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{1}{C}\int \mathbf{j}\,dt;$$

вспомнив формулы (34) и (35), находим отсюда:

$$\mathbf{v} = R\mathbf{j} + \omega L i\mathbf{j} + \frac{1}{\omega C i}\,\mathbf{j} = (R + ui)\,\mathbf{j} = \zeta\mathbf{j}, \qquad (36)$$

где

$$u = \omega L - \frac{1}{\omega C}; \quad \zeta = R + ui. \qquad (37)$$

Полученная зависимость между векторами напряжения и тока имеет вид обычного закона Ома с тою только разницей, что вместо омического сопротивления здесь входит комплексный множитель ζ, который называется *кажущимся сопротивлением цепи* и состоит из суммы трех „сопротивлений": *омического* (R), *сопротивления от самоиндукции* (ωLi) *и сопротивления от емкости* $\left(\frac{1}{\omega Ci}\right)$.

Формула (36) дает вместе с тем разложение вектора $\mathbf{v}$ на две составляющие: $R\mathbf{j}$ — по направлению $\mathbf{j}$ и $ui\mathbf{j}$ — по направлению, перпендикулярному к $\mathbf{j}$. Первая называется *ваттной*, вторая — *безваттной* составляющими напряжения. Эти термины станут ясными, если мы вычислим *среднюю мощность* W тока нашей цепи, которая определяется как среднее арифметическое по всему периоду от мгновенной мощности vj:

$$W = \frac{1}{T}\int_0^T vj\,dt = \frac{v_m j_m}{T}\int_0^T \sin(\omega t + \varphi_1)\sin(\omega t + \varphi_2)\,dt;$$

φ_1 означает здесь фазу напряжения, φ_2 — фазу тока, так что

$$v = v_m \sin(\omega t + \varphi_1); \quad j = j_m \sin(\omega t + \varphi_2).$$

---

[1]) Символ $\frac{d\mathbf{j}}{dt}$ обозначает вектор, соответствующий синусоидальной величине $\frac{dj}{dt}$, а символ $\int \mathbf{j}\,dt$ — вектор, соответствующий $\int j\,dt$.

Без труда находим:

$$W=\frac{v_m j_m}{2T}\int_0^T [\cos(\varphi_1-\varphi_2)-\cos(2\omega t+\varphi_1+\varphi_2)]\,dt=$$

$$=\frac{v_m j_m}{2}\cos(\varphi_1-\varphi_2)=v_{eff} j_{eff}\cos(\varphi_1-\varphi_2). \qquad (38)$$

Таким образом, наибольшая по абсолютному значению средняя мощность получается, когда фазы напряжения и тока совпадают или отличаются на π; наименьшая, равная нулю, мощность получается, когда эти фазы отличаются на $\pi/2$.

При составлении этого выражения W безваттная составляющая $ui\mathbf{j}$ вектора $\mathbf{v}$ дает среднюю мощность, равную нулю, ибо вектор $ui\mathbf{j}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{j}$, т. е. для него $\cos(\varphi_1-\varphi_2)=0$, и вся средняя мощность, которая переходит в джоулево тепло, получается лишь от ваттной („рабочей") составляющей.

Соотношение (36) можно переписать в виде:

$$\mathbf{j}=\frac{1}{\zeta}\mathbf{v}=\eta\mathbf{v}, \qquad \text{где} \quad \eta=\frac{1}{R+ui}=g+hi,$$

или

$$\mathbf{j}=g\mathbf{v}+hi\mathbf{v}.$$

Комплексный множитель η называется *кажущейся проводимостью цепи, он равен обратной величине кажущегося сопротивления*. Предыдущая же формула дает разложение вектора тока на ваттную и безваттную составляющие (по направлению $\mathbf{v}$ и перпендикулярно к нему).

2. Основные правила для вычисления сопротивления сложной цепи постоянного тока, в которую включены сопротивления последовательно или параллельно, правила, которые выводятся из законов Ома и Кирхгофа, остаются в силе и для цепей с переменным установившимся синусоидальным током, если только условимся мгновенные значения напряжения и тока заменить соответствующими векторами, а омические сопротивления — кажущимися.

Так, если в цепь включены *последовательно* кажущиеся сопротивления

$$\zeta_1=R_1+x_1 i; \qquad \zeta_2=R_2+x_2 i; \ \ldots;$$

то векторы напряжения и тока будут связаны соотношениями:

$$\mathbf{v}=\zeta'\mathbf{j}, \qquad \text{где} \quad \zeta'=\zeta_1+\zeta_2+\ldots, \qquad (39)$$

т. е. *при последовательном включении кажущиеся сопротивления складываются.*

Наоборот, если те же сопротивления включены *параллельно*, то мы получим соотношение:

$$\mathbf{v}=\zeta''\mathbf{j}, \qquad \text{где} \quad \frac{1}{\zeta''}=\frac{1}{\zeta_1}+\frac{1}{\zeta_2}+\ldots, \qquad (40)$$

т. е. *при параллельном включении складываются кажущиеся проводимости.*

Графически построение полного кажущегося сопротивления при последовательном включении кажущихся сопротивлений ζ_1, ζ_2, ... сводится просто к построению геометрической суммы векторов, изображающих эти комплексные числа.

Укажем построение в случае параллельного включения двух кажущихся сопротивлений ζ_1 и ζ_2. Мы имеем по предыдущему правилу:

$$\zeta'' = \frac{1}{\frac{1}{\zeta_1} + \frac{1}{\zeta_2}} = \frac{\zeta_1\zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2}.$$

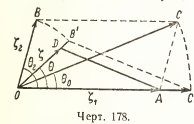
Положив:

$$\zeta'' = \rho e^{\theta i}; \quad \zeta_1 = \rho_1 e^{\theta_1 i}; \quad \zeta_2 = \rho_2 e^{\theta_2 i}; \quad \zeta_1 + \zeta_2 = \rho_0 e^{\theta_0 i},$$

мы будем иметь:

$$\rho = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_0}; \qquad \theta = \theta_1 + \theta_2 - \theta_0.$$

Это приводит нас к следующему геометрическому построению (черт. 178).[1]



Черт. 178.

Находим прежде всего сумму $\zeta_1 + \zeta_2 = \overline{OC}$; затем строим $\triangle AOD$, подобный $\triangle COB$, для чего поворачиваем $\triangle COB$ в положение $C'OB'$ и проводим прямую $\overline{AD} \parallel \overline{C'B'}$.

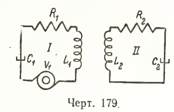
Из подобия треугольников выводим:

$$\overline{OD} = \overline{OA}\,\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}, \qquad \text{т. е.} \quad \rho = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_0},$$

$$\theta = \theta_2 - \theta_0 \qquad (\theta_1 = 0),$$

что и требовалось доказать.

3. Рассмотрим связанные колебания двух цепей, находящихся в магнитном соединении (черт. 179). Пусть v_1, j_1 означают внешнюю электродвижущую



Черт. 179.

силу и силу тока в цепи I, j_2 — силу тока в цепи II (без внешней электродвижущей силы); R_1, R_2, L_1, L_2, C_1, C_2 — соответственно: сопротивления, коэффициенты самоиндукции и емкости этих цепей, M — коэффициенты взаимной индукции цепей I и II.

Имеем соотношения:

$$v_1 = R_1 j_1 + L_1\frac{dj_1}{dt} + M\frac{dj_2}{dt} + \frac{1}{C_1}\int j_1\,dt,$$

$$0 = R_2 j_2 + L_2\frac{dj_2}{dt} + M\frac{dj_1}{dt} + \frac{1}{C_2}\int j_2\,dt.$$

---

[1]) На чертеже мы для упрощения направили ось OX по вектору ζ_1, что приводится к предположению $\theta_1 = 0$. В общем случае достаточно повернуть ось OX на угол θ_1 по часовой стрелке.

Если рассматривать установившийся процесс, в котором напряжение и ток меняются по синусоидальному закону одинаковой частоты, то эти уравнения можно переписать в векторной форме:

$$\mathbf{v}_1 = \left(R_1 + \omega L_1 i + \frac{1}{\omega C_1 i}\right)\mathbf{j}_1 + \omega M i \mathbf{j}_2 = \zeta_1 \mathbf{j}_1 + \omega M i \mathbf{j}_2,$$

$$0 = \omega M i \mathbf{j}_1 + \left(R_2 + \omega L_2 i + \frac{1}{\omega C_2 i}\right)\mathbf{j}_2 = \omega M i \mathbf{j}_1 + \zeta_2 \mathbf{j}_2,$$

где ζ_1 и ζ_2 — кажущиеся сопротивления цепей I и II, если они взяты сами по себе.

Решая относительно $\mathbf{j}_1$ и $\mathbf{j}_2$, получим без труда:

$$\mathbf{j}_1 = \frac{\zeta_2}{\zeta_1\zeta_2 + \omega^2 M^2}\,\mathbf{v}_1; \qquad \mathbf{j}_2 = -\frac{\omega M i}{\zeta_1\zeta_2 + \omega^2 M^2}\,\mathbf{v}_1.$$

Переписав первое уравнение в виде:

$$\mathbf{v}_1 = \left(\zeta_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\zeta_2}\right)\mathbf{j}_1,$$

мы можем сказать, что наличие цепи II изменяет кажущееся сопротивление ζ цепи I на слагаемое $\dfrac{\omega^2 M^2}{\zeta_2}$.

182. Кривые в комплексной форме. Если вещественные числа условимся изображать точками на данной оси OX, то изменение вещественной переменной приводится к передвижению соответствующей точки по оси OX. Совершенно аналогично изменению комплексной переменной $\zeta = x + yi$ приводится к передвижению изображающей точки по *плоскости* XOY.

Особенно интересен тот случай, когда переменная ζ при своем изменении описывает некоторую *кривую*; это случится тогда, когда вещественная и мнимая части, т. е. координаты x и y, суть функции некоторого параметра u, который мы будем считать вещественным:

$$x = \varphi_1(u); \quad y = \varphi_2(u). \tag{41}$$

Мы будем тогда писать просто:

$$\zeta = f(u), \quad \text{где} \quad f(u) = \varphi_1(u) + i\varphi_2(u),$$

и будем называть это уравнение — *уравнением рассматриваемой кривой* (41) *в комплексной форме.*

Уравнения (41) дают параметрическое представление кривой *в прямоугольных* координатах. К представлению ее *в полярных* координатах мы придем, если напишем переменную ζ в показательной форме:

$$\zeta = \rho e^{\theta i}; \quad \rho = \psi_1(u); \quad \theta = \psi_2(u).$$

В этом выражении множитель ρ есть не что иное, как $|\zeta|$, множитель же $e^{\theta i}$, который в случае вещественных ζ ($\theta = 0$ или π) совпадает со „знаком" (± 1), есть вектор длины единицы и обозначается символом:

$$\operatorname{Sgn}\zeta = e^{\theta i} = \frac{\zeta}{|\zeta|}$$

(сокращенное латинское слово „Signum" — знак).

К необходимости рассмотрения уравнений кривых в комплексной форме приводят векторные диаграммы. Если мы в соотношении

$$\mathbf{v} = \zeta \mathbf{j}$$

будем считать вектор тока **j** постоянным, но будем менять какую-нибудь из различных постоянных цепи, то будет меняться кажущееся сопротивление ζ и вектор **v**; конец этого вектора **v** опишет кривую, которая называется *диаграммой напряжения*, и, построив которую, мы получим ясную картину изменения вектора **v**. Точка ζ также опишет кривую (*диаграмма сопротивления*), которая только выбором масштаба будет отличаться от диаграммы напряжения (за единицу будет принят вектор **j**).

Рассмотрим теперь уравнения некоторых простейших кривых.

1. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $\zeta_0 = x_0 + y_0 i$ и образующей угол α с осью OX:

$$\zeta = \zeta_0 + ue^{\alpha i};$$

параметр u означает здесь расстояние, отсчитываемое от точки ζ_0 до ζ.

2. Уравнение окружности с центром в точке ζ_0 и радиусом **r**:

$$\zeta = \zeta_0 + re^{ui}.$$

3. Эллипс с центром в начале координат и полуосями a и b, причем большая ось направлена по оси OX, имеет в комплексной форме уравнение [177]:

$$\zeta = x + yi = a\cos u + bi\sin u = \frac{a+b}{2}e^{ui} + \frac{a-b}{2}e^{-ui}.$$

Если большая ось образует угол φ_0 с осью OX, то уравнение эллипса примет вид:

$$\zeta = e^{\varphi_0 i}\left[\frac{a+b}{2}e^{ui} + \frac{a-b}{2}e^{-ui}\right].$$

В общем случае, когда центр эллипса находится в точке ζ_0 и большая ось образует угол φ_0 с осью OX, эллипс будет иметь уравнение:

$$\zeta = \zeta_0 + e^{\varphi_0 i}\left[\frac{a+b}{2}e^{ui} + \frac{a-b}{2}e^{-ui}\right].$$

Если $b = a$, уравнение это обращается в уравнение окружности радиуса a:

$$\zeta = \zeta_0 + ae^{(\varphi_0 + u)i},$$

где $(\varphi_0 + u)$, так же как и u, — вещественный параметр.

Если $b = 0$, получим отрезок прямой:

$$\zeta = \zeta_0 + ae^{\varphi_0 i}\frac{e^{ui} + e^{-ui}}{2} = \zeta_0 + ae^{\varphi_0 i}\cos u; \quad \zeta = \zeta_0 + ve^{\varphi_0 i},$$

образующий угол φ_0 с осью OX, длины $2a$, середина которого в точке ζ_0, ибо параметр $v = a\cos u$ — вещественный, подобно u, но может принимать значения только между $(-a)$ и $(+a)$.

Рассматривая случаи окружности и отрезка прямой как предельные случаи эллипса, получающиеся, когда малая полуось становится равной большой или обращается в нуль, мы можем теперь сказать вообще, что *уравнение*

$$\zeta = \zeta_0 + \mu_1 e^{ui} + \mu_2 e^{-ui}, \tag{42}$$

где ζ_0, μ_1, μ_2 — *какие угодно комплексные числа, всегда представляет уравнение эллипса.*

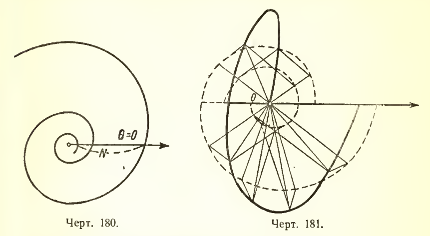
В самом деле, положив:

$$\mu_1 = M_1 e^{\theta_1 i}; \quad \mu_2 = M_2 e^{\theta_2 i}; \quad \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \varphi_0; \quad \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = \theta_0,$$

можем переписать уравнение (42) в виде:

$$\zeta = \zeta_0 + M_1 e^{(u+\theta_1)i} + M_2 e^{-(u-\theta_2)i} = \zeta_0 + e^{\varphi_0 i}\left[M_1 e^{(u+\theta_0)i} + M_2 e^{-(u+\theta_0)i}\right],$$

откуда ясно, что рассматриваемая кривая есть действительно эллипс с центром в точке ζ_0, полуосями $(M_1 \pm M_2)$, и большая ось которого образует угол φ_0 с осью OX, т. е. имеет направление биссектрисы угла между векторами μ_1 и μ_2. При $M_2 = 0$ эллипс обращается в окружность, при $M_2 = M_1$ — в отрезок прямой.



Черт. 180. Черт. 181.

4. При исследовании явлений переменного тока в цепях с непрерывно распределенными сопротивлениями, емкостями и самоиндукцией большое значение имеют кривые, уравнение которых в комплексной форме имеет вид:

$$\zeta = \nu e^{\gamma u}, \tag{43}$$

где ν и γ — какие угодно комплексные постоянные.

Положив $\nu = N_1 e^{\varphi_0 i}$, $\gamma = a + bi$ и переходя к полярным координатам имеем отсюда:

$$\zeta = \rho e^{\theta i} = N_1 e^{\varphi_0 i} e^{(a+bi)u} = N_1 e^{au} e^{(bu+\varphi_0)i},$$

т. е.

$$\rho = N_1 e^{au}, \quad \theta = bu + \varphi_0,$$

откуда

$$u = \frac{\theta - \varphi_0}{b},$$

или окончательно

$$\rho = N e^{\frac{a}{b}\theta} \qquad \left(N = N_1 e^{-\frac{a\varphi_0}{b}}\right),$$

т. е. рассматриваемая кривая есть логарифмическая спираль (черт. 180, соответствующий случаю $\frac{a}{b} > 0$).

Более сложные кривые типа:

$$\zeta = \nu_1 e^{\gamma_1 u} + \nu_2 e^{\gamma_2 u} + \ldots + \nu_s e^{\gamma_s u}$$

можно получить, построив „составляющие спирали“:

$$\zeta_1 = \nu_1 e^{\gamma_1 u}; \quad \zeta_2 = \nu_2 e^{\gamma_2 u}; \quad \ldots; \quad \zeta_s = \nu_s e^{\gamma_s u}$$

и вычисляя геометрически при каждом значении u сумму соответствующих значений $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_s$ (черт. 181).

183. Представление гармонического колебания в комплексной форме. Гармоническое затухающее колебание выражается формулой:

$$x = Ae^{-\varepsilon t} \sin(\omega t + \varphi_0), \tag{44}$$

где A и ε — положительные постоянные. Введем в рассмотрение комплексную величину:

$$\zeta = Ae^{\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) i} e^{(\omega + \varepsilon i) it} = Ae^{-\varepsilon t + \left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) i}. \tag{45}$$

Вещественная часть этой комплексной величины совпадает с выражением (44). Таким образом, мы можем представить любое гармоническое затухающее колебание как вещественную часть комплексного выражения вида:

$$\zeta = \alpha e^{\beta i t},$$

где α и β — комплексные числа. В случае формулы (45):

$$\alpha = Ae^{\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) i} \text{ и } \beta = \omega + \varepsilon i.$$

В случае чисто гармонического колебания без затухания $\varepsilon = 0$, и β будет числом вещественным.

Выражение (45) для ζ совпадает с выражением (43) при

$$\nu = Ae^{\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) i}, \quad \gamma = (\omega + \varepsilon i) i = -\varepsilon + \omega i \quad \text{и} \quad u = t.$$

Отсюда видно, что при изменении t точка ζ описывает логарифмическую спираль, причем полярный угол θ есть линейная функция времени t:

$$\theta = \omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2},$$

т. е. радиус-вектор из начала координат в точку ζ вращается вокруг начала с постоянной угловой скоростью ω. Проекция точки ζ на ось OX совершает затухающие колебания (44). Если $\varepsilon = 0$, то точка ζ движется по окружности $\rho = A$, и ее проекция на ось OX движется по закону гармонического колебания без затухания:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

§ 18. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЦЕЛЫХ МНОГОЧЛЕНОВ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ИХ КОРНЕЙ

184. Алгебраическое уравнение. В настоящем параграфе мы будем заниматься исследованием целого многочлена (полинома):

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_k z^{n-k} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n$ — данные комплексные числа и z — комплексная переменная, причем старший коэффициент a_0 мы можем

считать отличным от нуля. Основные действия с полиномами хорошо известны из элементарной алгебры. Мы напомним только основной результат, касающийся действия деления. Если $f(z)$ и $\varphi(z)$ — два полинома и степень $\varphi(z)$ не выше степени $f(z)$, то $f(z)$ можно представить в виде:

$$f(z)=\varphi(z)\cdot Q(z)+R(z),$$

где $Q(z)$ и $R(z)$ — также полиномы, причем степень $R(z)$ ниже степени $\varphi(z)$. Полиномы $Q(z)$ и $R(z)$ называются, соответственно, частным и остатком при делении $f(z)$ на $\varphi(z)$. Частное и остаток суть вполне определенные полиномы, так что представление $f(z)$ в указанном выше виде через $\varphi(z)$ — единственно.

Значения z, при подстановке которых полином обращается в нуль, называются корнями этого полинома. Таким образом, *корни* $f(z)$ суть решения уравнения:

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_kz^{n-k}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=0. \quad (1)$$

Написанное уравнение называется *алгебраическим уравнением n-й степени.*

При делении $f(z)$ на двучлен $(z-a)$, частное $Q(z)$ будет многочленом $(n-1)$-й степени со старшим коэффициентом a_0, остаток же R не будет содержать z. По основному свойству деления имеет место тождество:

$$f(z)=(z-a)\,Q(z)+R.$$

Подставляя в это тождество $z=a$, получим:

$$R=f(a),$$

т. е. *остаток, получаемый при делении полинома $f(z)$ на $(z-a)$, равен $f(a)$* (теорема Безу).

В частности, для того чтобы полином $f(z)$ делился на $(z-a)$ без остатка, необходимо и достаточно условие

$$f(a)=0,$$

т. е. *для того чтобы полином делился на двучлен $(z-a)$ без остатка, необходимо и достаточно, чтобы $z=a$ было корнем этого полинома.*

Таким образом, зная корень $z=a$ полинома $f(z)$, мы можем выделить из этого полинома множитель $(z-a)$:

$$f(z)=(z-a)\,f_1(z),$$

где

$$f_1(z)=b_0z^{n-1}+b_1z^{n-2}+\ldots+b_{n-2}z+b_{n-1} \quad (b_0=a_0);$$

нахождение остальных корней приводит к решению уравнения:

$$b_0z^{n-1}+b_1z^{n-2}+\ldots+b_{n-2}z+b_{n-1}=0$$

$(n-1)$-й степени.

Для дальнейшего нам необходимо иметь ответ на следующий вопрос: имеет ли всякое алгебраическое уравнение корни? В случае неалгебраического уравнения ответ может быть отрицательным. Так, например, уравнение

$$e^z = 0 \quad (z = x + yi)$$

вовсе корней не имеет, так как модуль e^x левой части ни при одном значении x в нуль не обращается. Но в случае алгебраического уравнения на поставленный выше вопрос имеется утвердительный ответ, который и заключается в следующей основной теореме алгебры: *всякое алгебраическое уравнение имеет, по крайней мере, один корень вещественный или комплексный.*

Мы примем здесь эту теорему без доказательства. В третьем томе при изложении теории функций комплексной переменной мы дадим ее доказательство.

185. Разложение полинома на множители. Всякий полином

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n, \tag{2}$$

согласно основной теореме, имеет корень $z = z_1$, а потому делится на $(z - z_1)$, и мы можем написать [184]:

$$f(z) = (z - z_1)(a_0 z^{n-1} + \ldots).$$

Второй множитель произведения, стоящего в правой части этого равенства, имеет, согласно упомянутой основной теореме, корень $z = z_2$, а потому делится на $(z - z_2)$, и мы можем написать:

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(a_0 z^{n-2} + \ldots).$$

Продолжая таким образом выделять множители первой степени, мы получим окончательно следующее разложение $f(z)$ на множители:

$$f(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n), \tag{3}$$

т. е. *всякий полином n-й степени разлагается на $(n + 1)$ множителей, один из которых равен старшему коэффициенту, а остальные суть двучлены первой степени вида $(z - a)$.*

При подстановке $z = z_s$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, по крайней мере, один из множителей в разложении (3) обратится в нуль, т. е. *значения $z = z_s$ суть корни $f(z)$.*

Любое значение z, отличное от всех z_s, не может быть корнем $f(z)$, так как при таком значении z ни один из сомножителей в разложении (3) в нуль не обратится.

Если все числа z_s различны между собой, то $f(z)$ имеет ровно n различных корней. Если среди чисел z_s есть одинаковые, то число различных корней $f(z)$ будет меньше n.

Таким образом мы можем высказать теорему: *полином n-й степени (или алгебраическое уравнение n-й степени) не может иметь более n различных корней.*

Непосредственным следствием этой теоремы является следующее предложение: *если известно, что некоторый полином степени не выше n имеет более n различных корней, то все коэффициенты этого полинома и свободный член равны нулю,* т. е. *этот полином равен нулю тождественно.*

Положим, что значения двух полиномов $f_1(z)$ и $f_2(z)$ степени не выше n совпадают более чем при n различных значениях z. Их разность $f_1(z)-f_2(z)$ есть полином степени не выше n, имеющий более n различных корней, а потому эта разность обращается тождественно в нуль, и $f_1(z)$ и $f_2(z)$ имеют одинаковые коэффициенты. *Если значения двух полиномов, степени не выше n, совпадают более чем при n различных значениях z, то все коэффициенты этих полиномов и свободные члены одинаковы,* т. е. *эти полиномы тождественно равны между собой.*

Это свойство полиномов лежит в основе так называемого метода неопределенных коэффициентов, которым мы в дальнейшем будем пользоваться. Практически сущность этого метода сводится к тому, что из тождественного равенства двух полиномов вытекают равенства коэффициентов этих полиномов при одинаковых степенях z.

Разложение (3) было нами получено путем выделения множителей первой степени из полинома $f(z)$ в определенном порядке. Покажем теперь, что окончательный вид разложения не зависит от того, каким образом мы выделяли указанные множители, т. е. что *полином имеет единственное разложение на множители вида* (3).

Положим, что, кроме разложения (3), имеет место разложение:

$$f(z)=b_0(z-z_1')(z-z_2')\ldots(z-z_n'). \qquad (3_1)$$

Сравнивая эти два разложения, можем написать тождество:

$$a_0(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)=$$
$$=b_0(z-z_1')(z-z_2')\ldots(z-z_n').$$

Левая часть этого тождества обращается в нуль при $z=z_1$; следовательно, то же должно иметь место и по отношению к правой части, т. е., по крайней мере, одно из чисел z_k' должно быть равным z_1. Можно, например, считать, что $z_1'=z_1$. Сокращая обе части написанного тождества на $(z-z_1)$, получим равенство:

$$a_0(z-z_2)\ldots(z-z_n)=b_0(z-z_2')\ldots(z-z_n'),$$

справедливое при всех значениях z, кроме, может быть, $z=z_1$. Но при этом, в силу доказанного выше предложения, это равенство также должно быть тождеством. Рассуждая так же, как и выше, докажем, что $z_2'=z_2$ и т. д. и, наконец, что $b_0=a_0$, т. е. разложение (3_1) должно совпадать с разложением (3).

186. Кратные корни. Среди чисел z_s, входящих в разложение (3), могут быть, как мы уже упоминали, и одинаковые. Соединяя в разложении (3) одинаковые сомножители в одну группу, можем написать его в виде:

$$f(z) = a_0 (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m}, \tag{4}$$

где числа $z_1, z_2, \dots, z_m$ различны и

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n. \tag{5}$$

Если в написанном таким образом разложении имеется множитель $(z - z_s)^{k_s}$, то корень $z = z_s$ называют *корнем кратности* k_s, и, *вообще, корень* $z = a$ *полинома* $f(z)$ *называется корнем кратности* k, *если* $f(z)$ *делится на* $(z - a)^k$ *и не делится на* $(z - a)^{k+1}$.

Укажем теперь другой признак кратности корня. Для этого введем в рассмотрение формулу Тэйлора. Заметим прежде всего, что можем определить производные от полинома $f(z)$ по тем же формулам, какие имели место при вещественной переменной:

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_k z^{n-k} + \dots + a_{n-1} z + a_n;$$
$$f'(z) = n a_0 z^{n-1} + (n-1) a_1 z^{n-2} + \dots + (n-k) a_k z^{n-k-1} + \dots + a_{n-1};$$
$$f''(z) = n(n-1) a_0 z^{n-2} + (n-1)(n-2) a_1 z^{n-3} + \dots + (n-k)(n-k-1) a_k z^{(n-k-2)} + \dots + 2 \cdot 1 a_{n-2}.$$

Формула Тэйлора:

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(z-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \dots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \tag{6}$$

представляет собою элементарное алгебраическое тождество, содержащее буквы a и z, справедливое не только при вещественных, но и при комплексных значениях этих букв.

Выведем теперь условие того, чтобы $z = a$ было корнем $f(z)$ кратности k. Перепишем (6) в виде:

$$f(z) = (z-a)^k \left[\frac{1}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{z-a}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a) + \dots + \frac{(z-a)^{n-k}}{n!} f^{(n)}(a) \right] + \left[f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(z-a)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(a) \right].$$

Полином, стоящий во второй квадратной скобке, имеет степень ниже степени $(z-a)^k$, и отсюда видно [184], что первая квадратная скобка есть частное, а вторая — остаток при делении $f(z)$ на $(z-a)^k$. Для того чтобы $f(z)$ делилось на $(z-a)^k$, необходимо и

достаточно, чтобы этот остаток был равен тождественно нулю. Рассматривая его, как полином относительно переменной $(z-a)$, получаем следующее условие:

$$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(k-1)}(a)=0. \tag{7}$$

К этому условию мы должны еще добавить условие:

$$f^{(k)}(a)\neq 0, \tag{8}$$

ибо если бы и $f^{(k)}(a)=0$, то $f(z)$ делился бы не только на $(z-a)^k$, но и на $(z-a)^{k+1}$. Итак, *условия* (7) *и* (8) *являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы* $z=a$ *было корнем кратности* k *полинома* $f(z)$.

Положим $\psi(z)=f'(z)$, следовательно:

$$\psi'(z)=f''(z);\ \psi''(z)=f'''(z);\ \ldots;\ \psi^{(s-1)}(z)=f^{(s)}(z).$$

Если $z=a$ есть корень кратности k полинома $f(z)$, то в силу (7) и (8):

$$\psi(a)=\psi'(a)=\ldots=\psi^{(k-2)}(a)=0 \text{ и } \psi^{(k-1)}(a)\neq 0,$$

т. е. $z=a$ будет корнем кратности $(k-1)$ для $\psi(z)$ или, что то же, для $f'(z)$, т. е. *корень кратности* k *некоторого полинома является корнем кратности* $(k-1)$ *для производной этого полинома.* Применяя последовательно это свойство, убедимся, *что он будет корнем кратности* $(k-2)$ *для второй производной, корнем кратности* $(k-3)$ *для третьей производной и т. д. и, наконец, корнем первой кратности, или, как говорят, простым корнем для производной* $(k-1)$*-го порядка.*

Таким образом, если для $f(z)$ имеет место разложение:

$$f(z)=a_0(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\ldots(z-z_m)^{k_m}, \tag{9}$$

то для $f'(z)$ будем иметь:

$$f'(z)=(z-z_1)^{k_1-1}(z-z_2)^{k_2-1}\ldots(z-z_m)^{k_m-1}\omega(z), \tag{10}$$

где $\omega(z)$ — полином, не имеющий уже корней, общих с $f(z)$.

187. Правило Горнера. Укажем теперь практически удобное правило для вычисления значений $f(z)$ и производных при заданном значении $z=a$.

Пусть при делении $f(z)$ на $(z-a)$ получается частное $f_1(z)$ и остаток r_1; при делении $f_1(z)$ на $(z-a)$ — частное $f_2(z)$ и остаток r_2 и т. д.:

$$f(z)=(z-a)f_1(z)+r_1;\quad r_1=f(a);$$
$$f_1(z)=(z-a)f_2(z)+r_2;\quad r_2=f_1(a);$$
$$f_2(z)=(z-a)f_3(z)+r_3;\quad r_3=f_2(a).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Перепишем формулу (6) в виде:

$$f(z)=f(a)+(z-a)\left[\frac{f'(a)}{1}+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-1}\right].$$

Сравнивая эту формулу с первым из написанных выше равенств, получим:

$$f_1(z)=\frac{f'(a)}{1}+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-1};\quad r_1=f(a).$$

Поступая точно так же с $f_1(z)$, найдем:

$$f_2(z)=\frac{f''(a)}{2!}+\frac{f'''(a)}{3!}(z-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-2};\quad r_2=\frac{f'(a)}{1},$$

и, вообще:

$$r_{k+1}=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Положим теперь:

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n;$$
$$f_1(z)=b_0z^{n-1}+b_1z^{n-2}+\ldots+b_{n-2}z+b_{n-1};\quad b_n=r_1$$

и покажем, каким образом можно вычислять коэффициенты частного b_s и остаток b_n. Раскрывая скобки и собирая члены с одинаковыми степенями z, получим тождество:

$$\begin{aligned}a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n&=\\=(z-a)(b_0z^{n-1}+b_1z^{n-2}+\ldots+b_{n-2}z+b_{n-1})+b_n&=\\=b_0z^n+(b_1-b_0a)z^{n-1}+(b_2-b_1a)z^{n-2}+\ldots&+\\+(b_{n-1}-b_{n-2}a)z+(b_n-b_{n-1}a)&,\end{aligned}$$

и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z:

$$a_0=b_0;\quad a_1=b_1-b_0a;\quad a_2=b_2-b_1a;\quad \ldots;\quad a_{n-1}=b_{n-1}-b_{n-2}a,$$
$$a_n=b_n-b_{n-1}a,$$

откуда:

$$b_0=a_0;\quad b_1=b_0a+a_1;\quad b_2=b_1a+a_2;\quad \ldots;\quad b_{n-1}=b_{n-2}a+a_{n-1};$$
$$b_n=b_{n-1}a+a_n=r_1.$$

Эти равенства и дают возможность последовательно определить величины b_s.

Точно так же, обозначив частное и остаток при делении $f_1(z)$ на $(z-a)$:

$$f_2(z)=c_0z^{n-2}+c_1z^{n-3}+\ldots+c_{n-3}z+c_{n-2};\quad c_{n-1}=r_2,$$

будем иметь:

$$c_0=b_0;\quad c_1=c_0a+b_1;\quad c_2=c_1a+b_2;\quad \ldots;\quad c_{n-2}=c_{n-3}a+b_{n-2};$$
$$c_{n-1}=c_{n-2}a+b_{n-1}=r_2,$$

т. е. коэффициенты c_s вычисляют последовательно при помощи b_s, так же как b_s при помощи a_s.

Указанный прием вычисления называется правилом или алгорифмом Горнера. [1])

Примеияя это правило, мы получим величины $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

---

[1]) Вообще алгорифмом называют определениое правило, согласио которому надо производить математические операции, чтобы получить требуемый ответ.

Приведем схему вычислений, которая понятна без пояснений:

$a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad a_3,\ \ldots,\ a_{n-2},\quad a_{n-1},\quad a_n$ $+\quad b_0a,\quad b_1a,\quad b_2a,\ \ldots,\ b_{n-3}a,\quad b_{n-2}a,\quad b_{n-1}a$	
$b_0=a_0,\quad b_1,\quad b_2,\quad b_3,\ \ldots,\ b_{n-2},\quad b_{n-1},$ $+\quad c_0a,\quad c_1a,\quad c_2a,\ \ldots,\ c_{n-3}a,\quad c_{n-2}a$	$b_n=r_1=f(a)$
$c_0=a_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots,\ c_{n-2},$	$c_{n-1}=r_2=\dfrac{f'(a)}{1}$
. . . .	
$l_0=a_0,\quad l_1$ $+\quad m_0a$	$l_2=r_{n-1}=\dfrac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}$
$m_0=a_0$	$m_1=r_n=\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$
$m_0=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$	

Пример. Найти значения функции

$$f(z)=z^5+2z^4-2z^2-25z+100$$

и ее производных при $z=-5$.

$a=-5$	1, 2, 0, −2, −25, 100 −5, 15, −75, 385, −1800	
	1, −3, 15, −77, 360 −5, 40, −275, 1760	$-1700=f(-5)$
	1, −8, 55, −352 −5, 65, −600	$2120=\dfrac{f'(-5)}{1!}$
	1, −13, 120 −5, 90	$-952=\dfrac{f''(-5)}{2!}$
	1, −18 −5	$210=\dfrac{f'''(-5)}{3!}$
	1	$-23=\dfrac{f^{(IV)}(-5)}{4!}$
	$1=\dfrac{f^{(V)}(-5)}{5!}$	

188. Общий наибольший делитель. Рассмотрим два полинома $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Каждый из них имеет определенное разложение на множители вида (3). *Общим наибольшим делителем* этих двух полиномов называется произведение всех двучленных множителей вида $(z-a)$, входящих как в разложение $f_1(z)$, так и в разложение $f_2(z)$, причем эти общие множители берутся с показателем степени, равным наименьшему из показателей, с которым они входят в разложения $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Постоянные множители при составлении общего наибольшего делителя никакой роли не играют. Таким образом, общий наибольший делитель двух полиномов есть полином, корни которого суть общие двум упомянутым полиномам корни с кратностью, равной наименьшей из тех двух кратностей, с которыми они входят в упомянутые полиномы. Если данные полиномы не имеют общих корней, то говорят, что они — *взаимно-простые*. Совершенно аналогично предыдущему можно определить и общий наибольший делитель нескольких полиномов.

Для составления общего наибольшего делителя указанным выше способом необходимо иметь разложение данных полиномов на множители первой степени. Но нахождение разложения (3) сводится к решению уравнения $f(z)=0$, что и составляет одну из основных задач алгебры.

Можно, однако, подобно тому, как это делается в арифметике для общего наибольшего делителя целых чисел, указать другой способ отыскания общего наибольшего делителя, не требующий разложения на множители, *способ последовательного деления*. Способ этот состоит в следующем. Положим, что степень $f_1(z)$ не ниже степени $f_2(z)$. Первый полином делим на второй, затем второй полином $f_2(z)$ делим на остаток, получаемый при первом делении, этот первый остаток делим на остаток, получаемый при втором делении, и т. д., пока не получится деление с остатком, равным нулю. *Последний остаток, отличный от нуля, и является общим наибольшим делителем двух данных полиномов.* Если этот остаток не содержит z, то данные полиномы будут взаимно-простыми. Таким образом, *нахождение общего наибольшего делителя сводится к делению полиномов, расположенных по убывающим степеням переменной.* Разделив $f_1(z)$ и $f_2(z)$ на $D(z)$, мы получим взаимно-простые полиномы. Один из них или оба могут и не содержать z.

Сравнивая разложения (9) и (10), мы видим, что общий наибольший делитель $D(z)$ полинома $f(z)$ и его производной $f'(z)$ будет:

$$D(z)=(z-z_1)^{k_1-1}(z-z_2)^{k_2-1}\,\ldots\,(z-z_m)^{k_m-1},$$

причем мы опускаем постоянный множитель, что является несущественным.

Разделив $f(z)$ на $D(z)$, получим:

$$\frac{f(z)}{D(z)}=a_0(z-z_1)(z-z_2)\,\ldots\,(z-z_m),$$

т. е. *при делении полинома $f(z)$ на общий наибольший делитель $f(z)$ и $f'(z)$ получается полином, имеющий все корни простые и совпадающие с различными корнями $f(z)$.*

Получение такого полинома называется операцией освобождения полинома $f(z)$ от кратных корней. Мы видим, что для этого нет необходимости решать уравнение $f(z)=0$.

Если $f(z)$ и $f'(z)$ — взаимно-простые, то $f(z)$ имеет все корни простые, и наоборот.

189. Вещественные полиномы. Рассмотрим теперь полином с вещественными коэффициентами:

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n,$$

и пусть этот полином имеет комплексный корень $z=a+bi\,(b\neq 0)$ кратности k, т. е.

$$f(a+bi)=f'(a+bi)=\ldots=f^{(k-1)}(a+bi)=0;$$
$$f^{(k)}(a+bi)=A+Bi\neq 0.$$

Заменим теперь в выражении $f(a+bi)$ и в производных все величины сопряженными. При этой замене коэффициенты a_s, как числа вещественные, останутся прежними, и лишь $(a+bi)$ перейдет в $(a-bi)$, т. е. полином $f(z)$ останется прежним, но вместо $z=a+bi$ в него будет подставлено $z=a-bi$. После замены комплексных чисел сопряженными, как известно [173], и общий результат, т. е. значение полинома, переходит в сопряженное. Таким образом получим:

$$f(a-bi)=f'(a-bi)=\ldots=f^{(k-1)}(a-bi)=0;$$
$$f^{(k)}(a-bi)=A-Bi\neq 0,$$

т. е. *если полином с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень $z=a+bi$ кратности k, то он должен иметь и сопряженный корень $z=a-bi$ той же кратности.*

Итак, комплексные корни полинома $f(z)$ с вещественными коэффициентами распределяются по парам сопряженных корней. Положим, что переменная z принимает лишь вещественные значения, и обозначим ее буквою x. Согласно формуле (3):

$$f(x)=a_0(x-z_1)(x-z_2)\ldots(x-z_n).$$

Если среди корней z будут мнимые, то соответствующие им множители также будут мнимыми. Перемножив попарно множители, соответствующие паре сопряженных корней, получим:

$$[x-(a+bi)][x-(a-bi)]=[(x-a)-bi][(x-a)+bi]=$$
$$=(x-a)^2+b^2=x^2+px+q,$$

где

$$p=-2a;\quad q=a^2+b^2\qquad (b\neq 0).$$

Таким образом, пара мнимых сопряженных корней дает вещественный множитель второй степени, и мы можем высказать следующее положение: *полином с вещественными коэффициентами разлагается на вещественные множители первой и второй степени.*

Разложение это имеет следующий вид:

$$f(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\times \times(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\ldots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}, \quad (11)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — вещественные корни $f(x)$ кратности $k_1, k_2, \ldots, k_r$ и множители второй степени происходят от пар мнимых сопряженных корней кратности $l_1, l_2, \ldots, l_t$.

190. Зависимость между корнями уравнения и его коэффициентами. Пусть, как и раньше, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ суть корни уравнения:

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=0.$$

Согласно формуле (3), будем иметь тождество:

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=a_0(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n).$$

Применяя в правой части известную из элементарной алгебры формулу для перемножения биномов, отличающихся вторыми членами, можем привести написанное тождество к виду:

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_kz^{n-k}+\ldots+a_n= =a_0[z^n-S_1z^{n-1}+S_2z^{n-2}+\ldots+(-1)^kS_kz^{n-k}+\ldots+(-1)^nS_n],$$

где S_k обозначает сумму всевозможных произведений из чисел z_s $(s=1, 2, \ldots, n)$ по k множителей в каждом. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим:

$$S_1=-\frac{a_1}{a_0};\quad S_2=\frac{a_2}{a_0};\quad \ldots;\quad S_k=(-1)^k\frac{a_k}{a_0};\quad \ldots;\quad S_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0},$$

или в раскрытом виде:

$$\left.\begin{aligned} z_1+z_2+\ldots+z_n&=-\frac{a_1}{a_0};\\ z_1z_2+z_2z_3+\ldots+z_{n-1}z_n&=\frac{a_2}{a_0};\\ &\ldots\ldots\ldots\\ z_1z_2\ldots z_n&=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Формулы эти являются обобщением известных свойств корней квадратного уравнения на случай уравнения любой степени. Они дают, между прочим, возможность составить уравнение, когда известны корни.

191. Уравнение третьей степени. Мы не будем подробно заниматься вопросом о фактическом вычислении корней алгебраических уравнений. Вопрос этот излагается в учебниках по приближенным вычислениям. Мы остановимся лишь на случае уравнения третьей степени и укажем также некоторые методы вычисления, которые будут полезны и в дальнейшем.

Начнем с исследования уравнения третьей степени:

$$y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0. \qquad (13)$$

Вместо y введем новую неизвестную x, полагая

$$y = x + \alpha.$$

Подставив это в левую часть уравнения (13), получим уравнение:

$$x^3 + (3\alpha + a_1)x^2 + (3\alpha^2 + 2a_1\alpha + a_2)x + (\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3) = 0.$$

Если положим $\alpha = -\frac{a_1}{3}$, то член с x^2 пропадает, и, следовательно, подстановка

$$y = x - \frac{a_1}{3}$$

преобразует уравнение (13) к виду:

$$f(x) = x^3 + px + q = 0, \qquad (14)$$

не содержащему члена с x^2.

Если p и q — вещественны, то уравнение (14) может иметь или все три вещественных корня, или один вещественный и два мнимых сопряженных корня [189]. Чтобы решить, какой из этих случаев имеет место, составим первую производную левой части уравнения:

$$f'(x) = 3x^2 + p.$$

Если $p > 0$, то $f'(x) > 0$, и $f(x)$ все время возрастает и будет иметь лишь один вещественный корень, ибо при переходе от $x = -\infty$ к $x = +\infty$ функция $f(x)$ меняет знак (—) на (+). Положим теперь, что $p < 0$. Функция $f(x)$, как нетрудно видеть, будет иметь максимум при $x = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$ и минимум при $x = \sqrt{-\frac{p}{3}}$. Подставляя эти значения x в выражение функции $f(x)$, получим для максимального и минимального значений этой функции, соответственно, выражения:

$$q \mp \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Если оба эти значения одного знака, т. е.

$$\left(q - \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)\left(q + \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = q^2 + \frac{4p^3}{27} > 0$$

или

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0, \qquad (15_1)$$

то уравнение имеет только один вещественный корень, который заключается или в промежутке $\left(-\infty, -\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$, или в промежутке $\left(+\sqrt{-\frac{p}{3}}, +\infty\right)$.

Если же упомянутое выше максимальное значение $f(x)$ имеет знак (+), а минимальное (—), т. е.

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0, \qquad (15_2)$$

то $f(-\infty)$, $f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$, $f\left(+\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$, $f(+\infty)$ будут иметь соответственно знаки (—), (+), (—), (+), и уравнение (14) будет иметь три вещественных корня. Заметим, кроме того, что при $p>0$, наверно, выполнено условие (15_1). Предоставляем читателю показать, что в случае:

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0, \qquad (15_3)$$

уравнение (14) имеет кратный корень $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ и корень $\frac{3q}{p}$, причем мы считаем $p\neq 0$, и из (15_3) следует $p<0$. При $p=0$ и $q\neq 0$ мы имеем неравенство (15_1), и уравнение (14) принимает вид $x^3+q=0$, т. е. $x=\sqrt[3]{-q}$, откуда следует, что уравнение (14) имеет один вещественный корень [175]. При $p=q=0$ уравнение (14) будет: $x^3=0$ и имеет корень $x=0$ третьей кратности.

Полученные результаты собраны в следующей таблице:

$x^3+px+q=0$	
$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$	Один вещественный и два мнимых сопряженных корня
$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$	Три вещественных различных корня
$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$	Три вещественных корня, среди которых есть кратный

На черт. 182 изображен график функции

$$y=x^3+px+q$$

при различных предположениях относительно $\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)$. В случае ($15_3$) двойному корню соответствует точка касания кривой с осью OX.

Выведем теперь формулу, выражающую корни уравнения (14) через его коэффициенты. Формула эта для практических вычислений не годится, и в следующем номере мы, пользуясь тригонометрическими функциями, извлечем из нее практически удобный способ вычисления корней.

Вместо неизвестных x введем две новые неизвестные u и v, полагая:

$$x=u+v. \qquad (16)$$

Подставим в уравнение (14):

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0,$$
$$u^3+v^3+(u+v)(3uv+p)+q=0. \qquad (17)$$

Неизвестные u и v подчиним условию:

$$3uv+p=0,$$

и тогда уравнение (17) дает нам:

$$u^3+v^3=-q.$$

Таким образом, вопрос привелся к решению двух уравнений:

$$uv = -\frac{p}{3}; \quad u^3 + v^3 = -q. \tag{18}$$

Возводя обе части первого из уравнений в куб, имеем:

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}; \quad u^3 + v^3 = -q,$$

и, следовательно, u^3 и v^3 суть корни квадратного уравнения:

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0,$$

т. е.

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}; \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{19}$$

Окончательно, согласно формуле (16), найдем:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{20}$$

Эта формула для решения кубического уравнения (14) носит название формулы Кардана — итальянского математика XVI столетия.

Обозначим для краткости через R_1 и R_2 выражения, стоящие под знаком кубических корней в формуле (20):

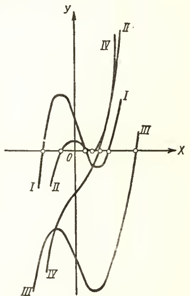
$$x = \sqrt[3]{R_1} + \sqrt[3]{R_2}.$$

Каждый из кубических корней имеет три различных значения [175], так что написанная формула даст, вообще говоря, девять различных значений x, и только три из них будут корнями уравнения (14). Посторонние значения x получились вследствие того, что мы возводили первое из уравнений (18) в третью степень. Для нас могут подойти лишь те значения, для коих u и v связаны первым из соотношений (18), т. е. в *формуле* (20) мы *должны брать только те значения корней кубических, произведение которых равно* $\left(-\frac{p}{3}\right)$.

Обозначим буквою ε одно из значений кубического корня из единицы:

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\varepsilon^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



Черт. 182.

и пусть $\sqrt[3]{R_1}$ и $\sqrt[3]{R_2}$ — какие-либо значения корней, удовлетворяющие указанному выше условию. Умножая их на ε и ε^2, получим все три значения корня [175].

Принимая во внимание, что $\varepsilon^3 = 1$, получим следующее выражение для корней уравнения (14), считая p и q — любыми комплексными:

$$x_1 = \sqrt[3]{R_1} + \sqrt[3]{R_2}; \quad x_2 = \varepsilon \sqrt[3]{R_1} + \varepsilon^2 \sqrt[3]{R_2}; \quad x_3 = \varepsilon^2 \sqrt[3]{R_1} + \varepsilon \sqrt[3]{R_2}. \qquad (21)$$

192. Решение кубического уравнения в тригонометрической форме. Положим, что коэффициенты p и q уравнения (14) — числа вещественные. Формула Кардана, как мы уже упоминали, неудобна для вычисления корней, и мы выведем более практичные формулы. Рассмотрим отдельно четыре случая.

1°. $$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0.$$

Из написанного следует, что $p < 0$. Подкоренные выражения R_1 и R_2 в формуле (20) будут мнимыми, но, несмотря на это, все три корня уравнения будут, как известно, вещественными [191].

Положим:

$$-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi),$$

откуда [171]:

$$r = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}; \quad \cos\varphi = -\frac{q}{2r}. \qquad (22)$$

Согласно формуле Кардана, имеем:

$$x = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) + \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} - i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) \quad (k = 0,\ 1,\ 2).$$

Принимая в обоих слагаемых равные значения для k, получим для произведения этих слагаемых положительное число: $\sqrt[3]{r^2} = -\frac{p}{3}$.

Окончательно будем иметь:

$$x = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2), \qquad (23)$$

где r и φ определяются по формуле (22), причем нетрудно показать, что если мы возьмем различные φ, удовлетворяющие второму из уравнений (22), то получим одинаковый набор корней по формуле (23).

2°. $$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0 \text{ и } p < 0.$$

Уравнение (14) имеет один вещественный корень и два комплексных сопряженных [191], причем из написанного следует, что $-\frac{p^3}{27} < \frac{q^2}{4}$. Введем вспомогательный угол ω, полагая:

$$\sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2}\sin\omega. \qquad (24_1)$$

Это даст нам:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\frac{q}{2}\cos\omega}=-\sqrt{-\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}},$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\frac{q}{2}\cos\omega}=-\sqrt{-\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}},$$

ибо, в силу (24_1):

$$\sqrt{-\frac{p}{3}}=\sqrt[3]{\frac{q}{2}\sin\omega}.$$

Вводя, наконец, угол φ по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}, \tag{24_2}$$

получим следующее выражение для вещественного корня:

$$x_1=-\sqrt{-\frac{p}{3}}(\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{ctg}\varphi)=-\frac{2\sqrt{-\frac{p}{3}}}{\sin 2\varphi}. \tag{25_1}$$

Предлагаем читателю, пользуясь формулой (21), показать, что мнимые корни будут иметь выражения:

$$\frac{\sqrt{-\frac{p}{3}}}{\sin 2\varphi}\pm i\sqrt{-p}\operatorname{ctg}2\varphi. \tag{25_2}$$

3°. $$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0 \text{ и } p>0.$$

В этом случае, как и в предыдущем, уравнение (14) будет иметь один вещественный корень и два мнимых сопряженных. При этом $\sqrt{\frac{p^3}{27}}$ может быть и меньше и больше, чем $\left|\frac{q}{2}\right|$, и мы вместо формулы (24_1) введем угол ω следующим образом:

$$\sqrt{\frac{p^3}{27}}=\frac{q}{2}\operatorname{tg}\omega. \tag{26_1}$$

Это дает:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{\frac{q\sin^2\frac{\omega}{2}}{\cos\omega}}=\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}},$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{\frac{q\cos^2\frac{\omega}{2}}{\cos\omega}}=\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}}.$$

Вводя новый угол φ по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}, \tag{26_2}$$

окончательно будем иметь:

$$x_1=\sqrt{\frac{p}{3}}(\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{ctg}\varphi)=-2\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{ctg}2\varphi. \tag{27_1}$$

Мнимые корни будут:

$$\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{ctg} 2\varphi \pm \frac{i\sqrt{p}}{\sin 2\varphi}. \qquad (27_2)$$

4°. $$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0.$$

Уравнение (14) имеет кратный корень, и в этом случае, как и в случае $p=0$, решение уравнения не представляет никаких затруднений.

Пользуясь выведенными тригонометрическими формулами, можно при помощи таблицы логарифмов вычислить корни кубического уравнения с большой степенью точности.

Пример 1.

$$x^3+9x^2+23x+14=0.$$

Полагая $x=y-3$, приведем уравнение к виду:

$$y^3-4y-1=0,$$

и это уравнение имеет три вещественных корня [191].

Формулы (22) дают $\cos\varphi$, и, находя самый угол φ, определяем корни по формулам (23):

$\cos\varphi=\frac{\sqrt{27}}{16}$; $\lg\cos\varphi=\bar{1},51156$
$\varphi=71°2'56''$
$\frac{\varphi}{3}=23°40'59''$; $\frac{\varphi+360°}{3}=143°40'59''$; $\frac{\varphi+720°}{3}=263°40'59''$
$\lg\frac{4}{\sqrt{3}}=0,36350$
$\lg y_1=0,32529$; $\lg(-y_2)=0,26970$; $\lg(-y_3)=\bar{1},40501$
$y_1=2,1149$; $y_2=-1,8608$; $y_3=-0,2541$
$x_1=-0,8851$; $x_2=-4,8608$; $x_3=-3,2541$

Пример 2.

$$x^3-3x+5=0.$$

Определяем угол ω по формуле (24_1) и угол φ — по формуле (24_2) и затем вычисляем корни по формулам (25_1) и (25_2):

$\lg\sin\omega=\bar{1},60206$; $\omega=23°34'11''$; $\frac{\omega}{2}=11°47'20''$
$\lg\operatorname{tg}\varphi=\bar{1},77318$; $\varphi=30°40'31''$; $2\varphi=61°21'02''$
$\lg\frac{1}{\sin 2\varphi}=0,05672$; $\frac{1}{\sin 2\varphi}=1,11395$
$\lg\sqrt{-p}\operatorname{ctg} 2\varphi=\bar{1},97602$; $\sqrt{-p}\operatorname{ctg} 2\varphi=0,94628$
$x_1=-2,2790$; $x_2, x_3=1,1395\pm 0,94628i$

193. Способ итерации. Во многих случаях, имея приближенное значение x_0 искомого корня ξ с небольшим числом десятичных знаков, удобно улучшать это приближенное значение корня. Одним из способов такого *исправления* приближенного значения корня является *способ итерации*, или способ последовательных приближений. Этот способ, как выяснится из дальнейшего, годится не только для алгебраических, но и для трансцендентных уравнений.

Положим, что уравнение

$$f(x) = 0 \qquad (28)$$

мы переписали в виде:

$$f_1(x) = f_2(x), \qquad (29)$$

причем $f_1(x)$ таково, что уравнение

$$f_1(x) = m$$

при любом вещественном m имеет один вещественный корень, который легко вычислить с большой степенью точности. Вычисление корня уравнения (29) при помощи метода итерации состоит в следующем: подставляя приближенное значение x_0 искомого корня в правую часть уравнения (29), определяем второе приближение x_1 к искомому корню из уравнения:

Черт. 183.

$$f_1(x) = f_2(x_0).$$

Подставляя x_1 в правую часть (29) для следующего приближения x_2, решаем уравнение $f_1(x) = f_2(x_1)$ и т. д. Таким образом определится последовательность значений:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots, \qquad (30)$$

причем

$$f_1(x_1) = f_2(x_0);$$
$$f_1(x_2) = f_2(x_1);\ \ldots, \qquad (31)$$
$$f_1(x_n) = f_2(x_{n-1});\ \ldots$$

Черт. 184.

Нетрудно указать геометрический смысл полученных приближений. Искомый корень есть абсцисса точки пересечения кривых:

$$y = f_1(x) \qquad (32_1)$$

и

$$y = f_2(x). \qquad (32_2)$$

На черт. 183 и 184 изображены обе эти кривые, причем, в случае черт. 183, производные $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$ имеют в точке пересечения одинаковые знаки, а в случае черт. 184 — разные знаки, и в обоих случаях

$$|f_2'(\xi)| < |f_1'(\xi)|.$$

Равенствам (31) соответствует следующее построение: проводим прямую $x = x_0$, параллельную оси OY, до пересечения ее в точке $(x_0,\ y_0)$

с кривой (32_2); через эту точку пересечения проводнм прямую $y=y_0$, параллельную оси OX, до пересечения ее в точке (x_1, y_0) с кривой (32_1); через точку (x_1, y_0) проводим онять прямую $x=x_1$, параллельную оси OY, до пересечения ее с кривой (32_2) в точке (x_1, y_1); через эту последнюю точку проводнм прямую $y=y_1$ до пересечення ее с кривой (32_1) в точке (x_2, y_1) и т. д. Абсциссы точек пересечения и дают нам последовательиость (30).

Если первое приблнженне взято достаточно близко к ξ, то эта последовательность, как видно из чертежа, стремнтся к ξ, как к пределу, причем в случае, когда $f_1'(\xi)$ и $f_2'(\xi)$ одинаковых знаков, получается ступенчатая ломаная линия, стремящаяся к ξ (черт. 183), а если $f_1'(\xi)$ и $f_2'(\xi)$ разных знаков, то эта ломаная линия стремится к ξ, имея форму спирали (черт. 184). Мы не будем приводить условий н строгого доказательства того, что последовательность (30) стремится к ξ как к пределу. Во многнх случаях это можно непосредственно обнаружить из чертежа.

Особенно удобен для приложения указаиный способ в том случае, когда уравнение (29) имеет вид:

$$x=f_2(x).$$

Пусть ξ есть корень этого уравнения, приближеииое зиачение которого

$$x_0=\xi+h$$

иам известно.

Ряд последовательных приближений будет:

$$x_1=f_2(x_0);\quad x_2=f_2(x_1),\ \ldots;\quad x_n=f_2(x_{n-1})\ \ldots$$

Можно показать, что действительно $x_n\to\xi$ прн $n\to\infty$, если функция $f_2(x)$ имеет пронзводиую $f_2'(x)$, которая удовлетворяет условию:

$$|f_2'(x)|\leqslant q<1,$$

если

$$\xi-h\leqslant x\leqslant\xi+h.$$

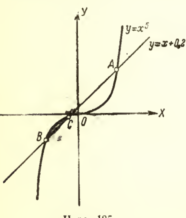
Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$x^5-x-0{,}2=0. \qquad (33)$$

Его вещественные корнн суть абсциссы точек пересечения лнний (черт. 185):

$$y=x^5, \qquad (34_1)$$

$$y=x+0{,}2 \qquad (34_2)$$



Черт. 185.

и, как видно нз черт. 185, уравнение (33) имеет одии положнтельный и два отрицательных корня.

В точках пересечення A и B, соответствующих положительному корню и большему по абсолютному значению отрнцательному корию, угловой коэффициент прямой (34_2) меньше по абсолютному значенню, чем угловой коэффициент касательной к крнвой (34_1), т. е. прн вычнслеиии этнх корней методом нтерации уравнеиие (33) иадо представить в виде:

$$x^5=x+0{,}2.$$

Принимая за первое приближение при вычислении положительного корня $x_0 = 1$, получим таблицу:

$\sqrt[5]{x_n + 0,2}$	$x_n + 0,2$
	1,2
$x_1 = 1,037$	1,237
$x_2 = 1,0434$	1,2434
$x_3 = 1,0445$	1,2445
$x_4 = 1,04472$	

Значение x_4 дает искомый корень с точностью до четвертого знака.

При вычислении отрицательного корня, большего по абсолютному значению, примем за первое приближение $x_0 = -1$.

В этом случае ошибка не превышает $2 \cdot 10^{-5}$.

В точке C, которой соответствует отрицательный корень, меньший по абсолютному значению, угловой коэффициент касательной к кривой (34_1) по абсолютному значению меньше единицы, и потому при применении метода итерации уравнение (33) надо представить в виде:

$$x = x^5 - 0,2.$$

Принимая за первое приближение $x_0 = 0$, получим:

$\sqrt[5]{x_n + 0,2}$	$x_n + 0,2$
	$-0,8$
$x_1 = -0,956$	$-0,756$
$x_2 = -0,9456$	$-0,7456$
$x_3 = -0,9430$	$-0,7430$
$x_4 = -0,9423$	$-0,7423$
$x_5 = -0,94214$	$-0,74214$
$x_6 = -0,94210$	

Приближение x_6 дает величину корня с точностью до пятого знака. Во всех трех случаях приближение к корню происходило по ступенчатой линии, как это изображено на черт 183, в чем нетрудно убедиться из черт. 185, и во всех трех случаях приближения x_n стремятся при увеличении n к искомому корню, изменяясь монотонно.

Пример 2.

$$x = \operatorname{tg} x. \qquad (35)$$

$x_n^5 - 0,2$	x_n^5
	-0
$x_1 = -0,2$	$-0,00032$
$x_2 = -0,20032$	

Корни этого уравнения суть абсциссы точек пересечения линий (черт. 186)

$$y = x, \quad y = \operatorname{tg} x,$$

и, как видно из черт. 186, уравнение имеет по одному корню в каждом из промежутков:

$$\left[(2n-1)\,\frac{\pi}{2}, \quad (2n+1)\,\frac{\pi}{2}\right]$$
$$(n = 0, \quad \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Для положительных корней будет иметь место приближенное равенство:

$$\alpha_n \approx (2n+1)\,\frac{\pi}{2},$$

где буквою α_n мы обозначаем n-й положительный корень уравнения (35).

Вычислим корень α_1, близкий к $\frac{3\pi}{2}$. Для применения метода итерации перепишем уравнение (35) в виде:

$$x = \operatorname{arc\,tg} x$$

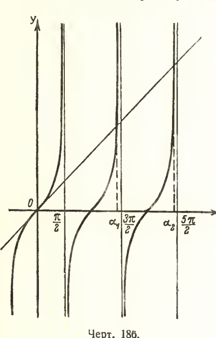
и примем за первое приближение $x_0 = \frac{3\pi}{2}$.

При вычислении последовательности приближений

$$x_n = \operatorname{arc\,tg} x_{n-1}$$

надо всегда брать значение арктангенса, содержащееся в третьей четверти. Пользуясь таблицами логарифмов и выражая дуги в радианном измерении, получим:

$$x_0 = 4{,}7124; \qquad x_1 = 4{,}5033;$$
$$x_2 = 4{,}4938; \qquad x_3 = 4{,}4935.$$



Черт. 186.

194. Способ Ньютона. Процесс итерации, указанный на черт. 183 и 184, состоит в приближении к искомому корню по прямым, параллельным координатным осям. Мы укажем теперь другие процессы итерации, для которых применяются и прямые, наклонные к координатным осям. Одним из таких способов является способ Ньютона.

Пусть x_0' и x_0 — приближенные значения корня ξ уравнения

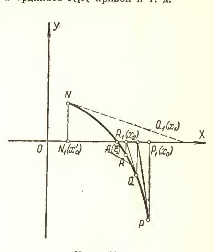
$$f(x) = 0 \tag{36}$$

и положим, что в промежутке (x_0', x_0) это уравнение имеет один только корень ξ. На черт. 187 и 188 изображен график кривой

$$y = f(x).$$

Абсциссы точек N и P суть приближенные значения x_0' и x_0 корня ξ, который является абсциссой точки A. В точке P проведена касательная PQ_1 к кривой, и из точки пересечения Q_1 этой касательной с осью абсцисс проведена ордината $\overline{Q_1Q}$ кривой; в точке Q проведена касательная QR_1 к кривой и из точки R_1 проведена ордината R_1R кривой и т. д.

Точки P_1, Q_1, R_1 ..., как видно из чертежа, стремятся к точке A, так что их абсциссы x_0, x_1, x_2 ... являются последовательными приближениями для корня ξ. Выведем формулу, выражающую x_n через x_{n-1}.



Черт. 187.

Уравнение касательной PQ_1 будет:

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0).$$

Подставляя $Y = 0$, найдем абсциссу точки Q_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \qquad (37)$$

и, вообще:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad (38)$$

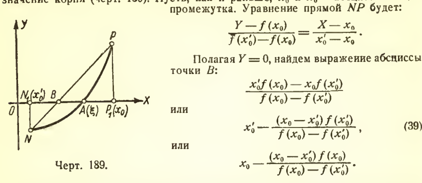
$$(n = 1,\ 2,\ 3\ldots).$$

То обстоятельство, что x_n действительно являются приближениями к корню ξ, мы усмотрели просто из чертежа, который сделан для того случая, когда $f(x)$ монотонна и остается выпуклой (или вогнутой) в промежутке (x_0', x_0), другими словами, когда $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак в этом промежутке [57, 71]. На строгом аналитическом доказательстве этого мы останавливаться не будем.

Черт. 188.

Заметим, что если бы мы применили способ Ньютона не к концу x_0, а к концу x_0', то не получили бы приближения к корню, как это показывает проведенная пунктиром касательная. В случае черт. 188, кривая обращена вогнутостью в сторону положительных ординат, т. е. $f''(x) > 0$, и способ Ньютона, как мы видим, надо применять к тому концу, где $f(x) > 0$. Из черт. 187 вытекает, что при $f''(x) < 0$ способ Ньютона надо применять к тому концу, где ордината $f(x) < 0$. Мы приходим, таким образом, к следующему правилу: *если $f'(x)$ и $f''(x)$ в промежутке (x_0', x_0) не обращаются в нуль, а ординаты $f(x_0')$ и $f(x_0)$ разных знаков, то, применяя способ Ньютона к тому концу промежутка, где знаки $f(x)$ и $f''(x)$ совпадают, получим последовательные приближения для единственного корня уравнения* (36), *заключающегося в промежутке* (x_0', x_0).

195. Способ простого интерполирования. Укажем еще один способ приближенного вычисления корня. Через концы N и P дуги кривой проведем прямую. Абсцисса следа B этой прямой на оси абсцисс и даст приближенное значение корня (черт. 189). Пусть, как и раньше, x_0' и x_0 — абсциссы концов промежутка. Уравнение прямой NP будет:



Черт. 189.

$$\frac{Y-f(x_0)}{f(x_0')-f(x_0)}=\frac{X-x_0}{x_0'-x_0}.$$

Полагая $Y=0$, найдем выражение абсциссы точки B:

$$\frac{x_0'f(x_0)-x_0f(x_0')}{f(x_0)-f(x_0')}$$

или

$$x_0'-\frac{(x_0-x_0')f(x_0')}{f(x_0)-f(x_0')}, \qquad (39)$$

или

$$x_0-\frac{(x_0-x_0')f(x_0)}{f(x_0)-f(x_0')}.$$

Замена участка кривой отрезком прямой, проходящей через конечные точки кривой, равносильна замене функции $f(x)$ в исследуемом промежутке полиномом первой степени, имеющим те же конечные значения, что и $f(x)$, или, что то же, равносильно предположению, что в указанном промежутке изменения $f(x)$ пропорциональны изменениям x. Этот прием, называемый обычно *простым интерполированием*, применяется, например, при пользовании таблицами логарифмов (partes proportionales). Указанный нами прием вычисления корня называется также иногда *правилом ложного положения* (regula falsi).

Черт. 190.

Если применять одновременно как способ простого интерполирования, так и способ Ньютона, получается возможность оба предела x_0' и x_0 приблизить к корню ξ.

Положим, например, что на конце x_0 знаки $f(x)$ и $f''(x)$ совпадают, так что способ Ньютона надо применять именно к этому концу.

Применяя оба способа, получим два новых приближенных значения (черт. 190):

$$x_1'=\frac{x_0'f(x_0)-x_0f(x_0')}{f(x_0)-f(x_0')};$$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

К приближенным значениям x_1' и x_1 можно опять применить те же формулы и получим новые значения:

$$x_2'=\frac{x_1'f(x_1)-x_1f(x_1')}{f(x_1)-f(x_1')};$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Таким образом получим два ряда значений:

$$x'_0, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n \ldots$$

и

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

приближающихся к корню ξ слева и справа.

Если у значений x'_n и x_n совпадают несколько первых десятичных знаков, то у корня ξ, который заключается между x'_n и x_n, должны быть те же самые десятичные знаки.

Пример. Уравнение

$$f(x) = x^5 - x - 0{,}2 = 0,$$

которое мы рассматривали в примере 1 [193], имеет один положительный корень в промежутке $1 < x < 1{,}1$, и в этом промежутке

$$f'(x) = 5x^4 - 1 \quad \text{и} \quad f''(x) = 20x^3$$

знака не меняют. Таким образом, мы можем положить:

$$x'_0 = 1; \ x_0 = 1{,}1.$$

Вычисляем значения функции $f(x)$:

$$f(1) = -0{,}2; \ f(1{,}1) = 0{,}31051,$$

откуда видно, что на правом конце ($x_0 = 1{,}1$), $f(x)$ и $f''(x)$ имеют один и тот же знак (+), и, следовательно, способ Ньютона надо применять именно к правому концу.

Предварительно вычисляем значение $f'(x)$ на правом конце:

$$f'(1{,}1) = 6{,}3205.$$

Согласно формулам (37) и (39), будем иметь:

$$x'_1 = 1 + \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2}{0{,}51051} = 1{,}039,$$

$$x_1 = 1{,}1 - \frac{0{,}31051}{6{,}3205} = 1{,}051.$$

Для следующего приближения вычисляем:

$$f(1{,}039) = -0{,}0282; \quad f(1{,}051) = 0{,}0313; \quad f'(1{,}051) = 5{,}1005,$$

откуда:

$$x'_2 = 1{,}039 + \frac{0{,}012 \cdot 0{,}0282}{0{,}0595} = 1{,}04469,$$

$$x_2 = 1{,}051 - \frac{0{,}0313}{5{,}1005} = 1{,}04487,$$

что дает значение корня с точностью до двух единиц в четвертом знаке [193]:

$$1{,}04469 < \xi < 1{,}04487.$$

§ 19. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

196. Разложение рациональной дроби на простейшие. Выше мы указали ряд приемов для вычисления неопределенных интегралов. В настоящем параграфе мы дополним эти указания и придадим им более систематический характер. Первым вопросом будет вопрос об интегрировании *рациональной дроби,* т. е. частного двух полиномов. Прежде чем переходить к решению этого вопроса, мы установим формулу, которая дает представление рациональной дроби в виде суммы некоторых дробей простейшего вида. Это представление называется *разложением рациональной дроби на простейшие*

Пусть имеется рациональная дробь:

$$\frac{F(x)}{f(x)}.$$

Если это — дробь неправильная, т. е. степень числителя не ниже степени знаменателя, то, производя деление, можем выделить целую часть — полином $Q(x)$ и представить дробь в виде:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Q(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)}, \tag{1}$$

где $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ есть уже правильная дробь, у которой степень числителя ниже степени знаменателя. Кроме того, мы будем считать эту дробь несократимой, т. е. будем считать, что числитель и знаменатель взаимно-простые [188].

Пусть $x = a$ есть корень знаменателя кратности k:

$$f(x) = (x-a)^k f_1(x) \quad \text{и} \quad f_1(a) \neq 0.$$

Докажем, что дробь можно представить в виде следующей суммы:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^k f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}, \tag{2}$$

где A — некоторая постоянная и второе слагаемое правой части — правильная дробь.

Составим разность:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^k f_1(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{\varphi(x) - Af_1(x)}{(x-a)^k f_1(x)}$$

и определим постоянную A так, чтобы числитель дроби, стоящей в правой части написанного равенства, делился на $(x-a)$ [184]:

$$\varphi(a) - Af_1(a) = 0,$$

откуда

$$A = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)} \qquad (f_1(a) \neq 0).$$

При таком выборе A только что упомянутую дробь можно сократить на $(x-a)$, и мы придем таким образом к тождеству (2).

Оно показывает, что, выделяя слагаемое вида $\frac{A}{(x-a)^k}$, которое и называется простейшей дробью, мы можем понизить показатель степени множителя $(x-a)$, входящего в знаменатель, по крайней мере, на единицу.

Положим, что знаменатель разлагается на множители:

$$f(x)=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_m)^{k_m}.$$

Постоянный множитель мы не пишем, так как он может быть отнесен к числителю. Применяя последовательно указанное выше правило выделения простейшей дроби, получим разложение правильной рациональной дроби на простейшие:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=&\frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{A_{k_1-1}^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1-1}}+\ldots+\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}+\\&+\frac{A_{k_2}^{(2)}}{(x-a_2)^{k_2}}+\frac{A_{k_2-1}^{(2)}}{(x-a_2)^{k_2-1}}+\ldots+\frac{A_1^{(2)}}{x-a_2}+\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\&+\frac{A_{k_m}^{(m)}}{(x-a_m)^{k_m}}+\frac{A_{k_m-1}^{(m)}}{(x-a_m)^{k_m-1}}+\ldots+\frac{A_1^{(m)}}{x-a_m}.\end{aligned}\qquad(3)$$

Укажем теперь способы определения коэффициентов, входящих. в правую часть написанного тождества. Освобождая его от знаменателя, придем к тождественному равенству двух полиномов и, приравнивая их соответствующие коэффициенты, получим систему уравнений первой степени для определения искомых коэффициентов. Изложенный способ, как мы уже упоминали выше [185], называется способом *неопределенных коэффициентов*.

Можно поступать и иначе, а именно, придавать в упомянутом выше тождественном равенстве полиномов различные частные значения переменной x. Этим *способом подстановки* можно еще пользоваться и предварительно продифференцировав любое число раз упомянутое тождество.

Можно доказать, на чем мы останавливаться не будем, что разложение (3) единственно, т. е., что его коэффициенты имеют вполне определенное значение, не зависящее от способа разложения. В дальнейшем мы дадим примеры применения указанных выше способов определения неизвестных коэффициентов разложения.

В случае вещественности полиномов $\varphi(x)$ и $f(x)$, правая часть тождества (3) может все-таки содержать мнимые члены, происходящие от мнимых корней знаменателя. Мы приведем другое разложение рациональной дроби, свободное от этого недостатка, но ограничимся при этом лишь тем случаем, когда знаменатель дроби имеет только простые корни, так как в приложениях имеет наибольшее значение именно этот случай.

Паре комплексных сопряженных корней знаменателя $x = a \pm bi$ будет соответствовать сумма простейших дробей:

$$\frac{A+Bi}{x-a-bi}+\frac{A-Bi}{x-a+bi}.$$

Приводя эти дроби к одному знаменателю, получим простейшую дробь вида:

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q} \qquad (p=-2a;\ q=a^2+b^2).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае вещественная рациональная дробь разложится на вещественные простейшие:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_r}{x-a_r}+ \\ +\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+p_2x+q_2}+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{x^2+p_sx+q_s}, \quad (4)$$

причем в первой строке стоят дроби, соответствующие вещественным корням знаменателя, а во второй — дроби, соответствующие парам комплексных сопряженных корней.

197. Интегрирование рациональной дроби. Интегрирование рациональной дроби в силу формулы (1) приводится к интегрированию полинома, что даст также полином, и к интегрированию правильной рациональной дроби, что мы и будем сейчас рассматривать.

Если знаменатель дроби имеет только простые корни, то, в силу формулы (4), все приведется к интегралам двух видов:

1°. $$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\lg(x-a)+C$$

и

2°. $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx.$$

Вспоминая сказанное [92], получим ответ вида:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \lambda\lg(x^2+px+q)+\mu\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае интеграл выразится через логарифмы и арктангенсы.

Рассмотрим теперь тот случай, когда знаменатель правильной рациональной дроби содержит кратные корни. Обратимся к разложению (3). Мнимые числа, которые могут в нем встретиться, будут играть лишь промежуточную роль в дальнейших вычислениях, и в окончательном результате исчезнут.

При интегрировании простейших дробей, знаменатель которых выше первой степени, мы получим также рациональную дробь:

$$\int \frac{A_{k_i-s}^{(i)}}{(x-a_i)^{k_i-s}}\,dx = \frac{A_{k_i-s}^{(i)}}{(1-k_i+s)(x-a_i)^{k_i-s-1}} + C \quad (k_i - s > 1).$$

Сумма полученных после интегрирования дробей даст *алгебраическую часть* интеграла, которая по приведении к общему знаменателю будет, очевидно, правильной дробью вида:

$$\frac{\omega(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}(x-a_2)^{k_2-1}\ldots(x-a_m)^{k_m-1}}.$$

Числитель $\omega(x)$ есть полином степени, по крайней мере, на единицу ниже степени знаменателя, а знаменатель представляет собою общий наибольший делитель $D(x)$ знаменателя интегрируемой дроби $f(x)$ и ее первой производной $f'(x)$ [188].

Сумма остальных непроинтегрированных дробей:

$$\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1} + \frac{A_1^{(2)}}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_1^{(m)}}{x-a_m}$$

при приведении к общему знаменателю окажется правильной дробью вида:

$$\frac{\omega_1(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)},$$

где $\omega_1(x)$ есть полином степени, по крайней мере, на единицу ниже степени знаменателя, а знаменатель представляет собою частное $D_1(x)$ от деления $f(x)$ на $D(x)$. Таким образом, мы получим следующую формулу Остроградского — Эрмита

$$\int \frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx = \frac{\omega(x)}{D(x)} + \int \frac{\omega_1(x)}{D_1(x)}\,dx. \tag{5}$$

Многочлены $D(x)$ и $D_1(x)$ мы можем определять и не зная корней $f(x)$ [188]. Укажем теперь, как определить коэффициенты полиномов $\omega(x)$ и $\omega_1(x)$, степени которых мы можем считать на единицу ниже степеней соответствующих знаменателей. Дифференцируя равенство (5), освобождаемся от знаков интеграла. Освобождаясь в полученном таким образом тождестве от знаменателя, будем иметь тождественное равенство двух полиномов и, применяя к нему метод неопределенных коэффициентов или подстановки, сможем определить коэффициенты $\omega(x)$ и $\omega_1(x)$.

Формула Остроградского — Эрмита дает, таким образом, алгебраическую часть интеграла правильной рациональной дроби и тогда, когда корни знаменателя неизвестны. Знаменатель дроби, стоящей под знаком интеграла в правой части равенства (5), содержит только простые корни, и, разлагая эту дробь на простейшие, мы сумеем вычислить этот интеграл, причем, как это мы только что видели, он выразится через логарифмы и арктангенсы. Для проведения последней операции нам надо знать корни $D_1(x)$.

Пример. Согласно формуле Остроградского — Эрмита

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x^3+1} + \int \frac{\delta x^2 + \varepsilon x + \eta}{x^3+1}\,dx.$$

Дифференцируем по x:

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} = \frac{(2\alpha x + \beta)(x^3+1) - 3x^2(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)}{(x^3+1)^2} + \frac{\delta x^2 + \varepsilon x + \eta}{x^3+1}$$

и, освобождаясь от знаменателя, имеем:

$$1 = (2\alpha x + \beta)(x^3+1) - 3x^2(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) + (\delta x^2 + \varepsilon x + \eta)(x^3+1).$$

Сравнивая коэффициенты при x^5, получаем $\delta = 0$, и сравнивая затем коэффициенты при x^2, получим $\gamma = 0$. Подставляя в написанное тождество $\gamma = \delta = 0$ и сравнивая коэффициенты при остальных степенях, будем иметь:

$$\varepsilon - \alpha = 0; \quad \eta - 2\beta = 0; \quad 2\alpha + \varepsilon = 0; \quad \beta + \eta = 1,$$

откуда окончательно:

$$\alpha = \gamma = \delta = \varepsilon = 0; \quad \beta = \frac{1}{3}; \qquad \eta = \frac{2}{3}$$

и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3+1}.$$

Последний интеграл вычисляется разложением дроби на простейшие:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1}.$$

Освобождаемся от знаменателя:

$$1 = A(x^2 - x + 1) + (Mx+N)(x+1).$$

Полагая $x = -1$, получим $A = \frac{1}{3}$, а затем, сравнивая коэффициенты при x^2 и свободные члены:

$$M = -\frac{1}{3}; \quad N = \frac{2}{3},$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)}.$$

Окончательно получим:

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\lg(x+1) - \frac{1}{6}\lg(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C,$$

откуда

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{9}\lg(x+1) - \frac{1}{9}\lg(x^2-x+1) +$$
$$+ \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

198. Интеграл от выражений, содержащих радикалы. Рассмотрим некоторые другие типы интегралов, которые приводятся к интегралам от рациональной дроби.

1. Интеграл

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\lambda}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\mu}, \ldots\right] dx, \tag{6}$$

где R — рациональная функция своих аргументов, т. е. частное полиномов от этих аргументов, а λ, μ, ... — рациональные числа. Пусть m — общий знаменатель этих дробей. Введем новую переменную t:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m.$$

При этом, очевидно, x, $\frac{dx}{dt}$ и выражения:

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\lambda}, \qquad \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\mu}.$$

будут рациональными функциями t, и интеграл (6) приведется к интегралу от рациональной дроби.

2. *Биномный дифференциал.* К интегралу (6) приводятся в некоторых случаях *интегралы от биномных дифференциалов:*

$$\int x^m (a+bx^n)^p \, dx, \tag{7}$$

где m, n и p — рациональные числа.

Положим $x = t^{\frac{1}{n}}$:

$$\int x^m (a+bx^n)^p \, dx = \frac{1}{n} \int t^{\frac{m+1}{n}-1} (a+bt)^p \, dt.$$

Если p или $\frac{m+1}{n}$ есть целое число, то полученный интеграл есть интеграл вида (6).

Из очевидного равенства:

$$\int t^{\frac{m+1}{n}-1} (a+bt)^p \, dt = \int t^{\frac{m+1}{n}+p-1} \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt$$

следует, что и в том случае, когда $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число, интеграл (7) приводится к виду (6).

Существует *теорема Чебышева*, согласно которой указанные три случая исчерпывают все случаи, в которых интеграл от биномного дифференциала выражается через элементарные функции.

199. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$. Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \tag{8}$$

где R — рациональная функция своих аргументов, приводятся к интегралам от рациональной дроби при помощи *подстановок Эйлера*.

В случае $a>0$, можно пользоваться *первой подстановкой Эйлера*:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x.$$

Возвышая обе части этого равенства в квадрат и решая относительно x, получим:

$$x=\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b},$$

откуда видно, что x, $\frac{dx}{dt}$ и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ будут рациональными функциями от t и, следовательно, интеграл (8) приведется к интегралу от рациональной дроби.

В случае $c>0$, можно пользоваться *второй подстановкой* Эйлера

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx+\sqrt{c}.$$

Предлагаем читателю убедиться в этом.

В случае $a<0$, трехчлен (ax^2+bx+c) должен иметь вещественные корни x_1 и x_2, ибо в противном случае он имел бы при всех вещественных значениях x знак (—), а $\sqrt{ax^2+bx+c}$ был бы величиной мнимой. В случае вещественности корней упомянутого трехчлена, интеграл (8) приводится к интегралу от рациональной дроби при помощи *третьей подстановки* Эйлера:

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_2),$$

в чем и предлагаем убедиться читателю.

Подстановки Эйлера приводят большею частью к сложным выкладкам, а потому мы укажем другой прием вычисления интеграла (8).

Обозначим для краткости письма:

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c}.$$

Всякая положительная четная степень y представляет собою полином от x, а потому подинтегральную функцию нетрудно привести к виду:

$$R(x, y)=\frac{\omega_1(x)+\omega_2(x)y}{\omega_3(x)+\omega_4(x)y},$$

где $\omega_s(x)$ — полиномы от x. Освобождаясь от иррациональности в знаменателе и совершая элементарные преобразования, можно преобразовать написанное выражение к виду:

$$R(x, y) = \frac{\omega_5(x)}{\omega_6(x)} + \frac{\omega_7(x)}{\omega_8(x)\,y}.$$

Первое слагаемое есть рациональная дробь, интегрировать которую мы уже умеем. Выделяя из дроби $\frac{\omega_7(x)}{\omega_8(x)}$ целую часть и разлагая оставшуюся правильную дробь на простейшие, мы придем к интегралам вида:

$$\int \frac{\varphi(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \tag{9}$$

и

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{10}$$

где $\varphi(x)$ — полином от x.

При этом мы предполагаем, что полином $\omega_s(x)$ имеет лишь вещественные корни.

Прежде чем переходить к рассмотрению интегралов (9) и (10), отметим два простейших частных случая интеграла (9):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg\left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}\right) + C \qquad (a > 0), \tag{11}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{m^2 - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{x - \frac{b}{2}}{m} + C. \tag{12}$$

Формулу (11) нетрудно получить при помощи первой подстановки Эйлера. Интеграл (12) уже был нами разобран раньше **[92]**.

Для вычисления интеграла (9) удобно пользоваться формулой:

$$\int \frac{\varphi(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \psi(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{13}$$

где $\psi(x)$ — полином степени на единицу ниже, чем $\varphi(x)$, и λ — постоянная. На доказательстве формулы (13) мы останавливаться не будем. Дифференцируя соотношение (13) и освобождаясь от знаменателя, получим тождественное равенство двух полиномов, откуда и можно определить коэффициенты полиномов $\psi(x)$ и постоянную λ.

Интеграл (10) приводится к интегралу (9) при помощи подстановки

$$x - a = \frac{1}{t}.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}\,dx =$$
$$= \int \frac{x}{x-1}\,dx - \int \frac{x^2-x+1}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}\,dx =$$
$$= x + \lg(x-1) - \int \frac{x^2-x+1}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}\,dx.$$

Но

$$\frac{x^2-x+1}{x-1} = x + \frac{1}{x-1},$$

а потому

$$\int \frac{x^2-x+1}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}\,dx + \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Согласно формуле (13):

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}\,dx = a\sqrt{x^2-x+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Дифференцируя это соотношение и освобождаясь от знаменателя, получим тождество:

$$2x = a(2x-1) + 2\lambda,$$

откуда

$$a = 1; \quad \lambda = \frac{1}{2},$$

и, следовательно, в силу формулы (11):

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}\,dx = \sqrt{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\lg\left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2-x+1}\right) + C.$$

Подставляя

$$x - 1 = \frac{1}{t},$$

получим:

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} =$$
$$= -\lg\left(t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+1}\right) + C =$$
$$= -\lg\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + 1}\right) + C =$$
$$= -\lg\left(x + 1 + 2\sqrt{x^2-x+1}\right) + \lg(x-1) + C,$$

окончательно:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = x - \sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{2}\lg\left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2-x+1}\right) +$$
$$+ \lg\left(x + 1 + 2\sqrt{x^2-x+1}\right) + C.$$

Интеграл (8) является частным случаем *абелева интеграла*, который имеет вид:

$$\int R(x, y)\,dx, \tag{14}$$

где R — рациональная функция своих аргументов и y — *алгебраическая функция от* x, т. е. функция от x, которая определяется из уравнения

$$f(x, y) = 0, \tag{15}$$

левая часть которого есть целый многочлен относительно x и y. Если

$$y = \sqrt{P(x)},$$

где $P(x)$ — полином третьей или четвертой степени от x, то абелев интеграл (14) называется эллиптическим интегралом. Мы займемся этими интегралами в третьем томе. Даже и этот последний, а тем более и общий абелев интеграл, вообще говоря, не выражается через элементарные функции. Если степень полинома $P(x)$ выше четвертой, то интеграл (14) называется гиперэллиптическим.

Если соотношение (15), которое выражает y как алгебраическую функцию от x, обладает тем свойством, что x и y могут быть выражены в виде рациональных функций вспомогательного параметра t, то, очевидно, абелев интеграл (14) приводится к интегралу от рациональной дроби. В указанном случае алгебраическая кривая, соответствующая соотношению (15), называется *уникурзальной*. В частности, подстановки Эйлера служат доказательством уникурзальности кривой:

$$y^2 = ax^2 + bx + c.$$

200. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$. Интеграл вида:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx, \tag{16}$$

где R — рациональная функция своих аргументов, приводится к интегралу от рациональной дроби, если ввести новую переменную

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

Действительно, согласно известным формулам тригонометрии, получим:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

и, кроме того,

$$x = 2 \operatorname{arc\,tg} t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

откуда и вытекает непосредственно наше утверждение.

Укажем теперь некоторые частные случаи, когда выкладки могут быть упрощены.

1. Положим, что $R(\sin x, \cos x)$ не меняется при замене $\sin x$ и $\cos x$, соответственно, на $(-\sin x)$ и $(-\cos x)$, т. е. предположим, что $R(\sin x, \cos x)$ имеет период π.

Так как

$$\sin x = \cos x \operatorname{tg} x,$$

то $R(\sin x, \cos x)$ оказывается рациональной функцией от $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$, не меняющейся при замене $\cos x$ на $(-\cos x)$, т. е. содержащей только четные степени $\cos x$:

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(\cos^2 x, \operatorname{tg} x).$$

В рассматриваемом случае для приведения интеграла (16) к интегралу от рациональной дроби достаточно положить:

$$t = \operatorname{tg} x.$$

Действительно, при этом:

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Итак, если $R(\sin x, \cos x)$ *не меняется при замене* $\sin x$ и $\cos x$, *соответственно, на* $(-\sin x)$ и $(-\cos x)$, *то интеграл* (16) *приводится к интегралу от рациональной дроби при помощи подстановки* $t = \operatorname{tg} x$.

2. Предположим теперь, что $R(\sin x, \cos x)$ меняет лишь знак при замене $\sin x$ на $(-\sin x)$. Функция

$$\frac{R(\sin x, \cos x)}{\sin x}$$

не будет вовсе меняться при указанной замене, т. е. будет содержать только четные степени $\sin x$, а следовательно:

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(\sin^2 x, \cos x) \cdot \sin x.$$

Подставляя $t = \cos x$, получим:

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = -\int R_1(1-t^2, t)\, dt,$$

т. е. *если* $R(\sin x, \cos x)$ *при замене* $\sin x$ на $(-\sin x)$ *меняет лишь знак, то интеграл* (16) *приводится к интегралу от рациональной дроби при помощи подстановки* $t = \cos x$.

3. Точно так же нетрудно показать, что если $R(\sin x, \cos x)$ *при замене* $\cos x$ *на* $(-\cos x)$ *меняет лишь знак, то интеграл* (16) *приводится к интегралу от рациональной дроби при помощи подстановки* $t = \sin x$.

201. Интегралы вида $\int e^{ax}[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx]\, dx$. Интеграл вида:

$$\int e^{ax} \varphi(x)\, dx, \tag{17}$$

где $\varphi(x)$ — полином n-й степени от x, интегрированием по частям приводится к:

$$\int e^{ax}\varphi(x)\, dx = \frac{1}{a} e^{ax}\varphi(x) - \frac{1}{a}\int e^{ax}\varphi'(x)\, dx.$$

Таким образом, выделяя из интеграла слагаемое, имеющее вид произведения e^{ax} на полином n-й степени, мы можем понизить степень полинома под знаком интеграла на единицу. Продолжая таким образом интегрировать по частям и принимая во внимание, что

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C,$$

получим:

$$\int e^{ax}\varphi(x)\, dx = e^{ax}\psi(x) + C, \tag{18}$$

где $\psi(x)$ — полином той же n-й степени, что и $\varphi(x)$, т. е. *интеграл от произведения показательной функции e^{ax} на полином n-й степени имеет вид такого же произведения.*

Дифференцируя соотношение (18) и сокращая обе части полученного тождества на e^{ax}, можем определить коэффициенты полинома $\psi(x)$ по способу неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим теперь интеграл более общего вида:

$$\int e^{ax}[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx]\,dx, \qquad (19)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — полиномы от x. Пусть n — наибольшая из степеней этих двух полиномов. Вводя в качестве вспомогательного средства комплексные величины, можем привести интеграл (19) к интегралу (17), а именно, подставив вместо $\cos bx$ и $\sin bx$ их выражения по формулам Эйлера [176]:

$$\cos bx = \frac{e^{bxi} + e^{-bxi}}{2}; \quad \sin bx = \frac{e^{bxi} - e^{-bxi}}{2i},$$

получим:

$$\int e^{ax}[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx]\,dx = \\ = \int e^{(a+bi)x}\varphi(x)\,dx + \int e^{(a-bi)x}\varphi_1(x)\,dx,$$

где $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ — полиномы степени не выше n. Применяя формулу (18):

$$\int e^{ax}[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx]\,dx = \\ = e^{(a+bi)x}\psi(x) + e^{(a-bi)x}\psi_1(x) + C,$$

где $\psi(x)$ и $\psi_1(x)$ — полиномы степени не выше n. Подставляя:

$$e^{\pm bxi} = \cos bx \pm i\sin bx,$$

окончательно имеем:

$$\int e^{ax}[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx]\,dx = \\ = e^{ax}[R(x)\cos bx + S(x)\sin bx] + C, \qquad (20)$$

где $R(x)$ и $S(x)$ — полиномы степени не выше n. Таким образом, мы видим, что *интеграл* (19) *имеет выражение того же вида, что и его подинтегральная функция, причем степень полиномов в выражении интеграла надо брать равной наибольшей из степеней полиномов, стоящих в подинтегральной функции.*

Дифференцируя соотношение (20), сокращая полученное тождество на e^{ax} и приравнивая коэффициенты одинаковых членов вида $x^s\cos bx$ и $x^s\sin bx$ $(s = 0, 1, 2, \ldots, n)$, стоящих в правой и левой частях, получим систему уравнений первой степени для определения коэффициентов полиномов $R(x)$ и $S(x)$. Заметим при этом, что, если $\cos bx$ или $\sin bx$ под знак интеграла и не входят, в правой части

формулы надо обязательно писать обе тригонометрические функции, помня высказанное выше правило определения степеней полиномов $R(x)$ и $S(x)$.

К интегралам вида (19) приводятся непосредственно интегралы вида:

$$\int e^{ax}\varphi(x)\sin(a_1x+b_1)\sin(a_2x+b_2)\ldots\cos(c_1x+d_1)\cos(c_2x+d_2)\ldots dx.$$

Действительно, пользуясь известными тригонометрическими формулами, выражающими сумму и разность синусов и косинусов в виде произведения, можно, наоборот, произведение каких-либо двух из вышеупомянутых тригонометрических функций выразить в виде суммы или разности синусов и косинусов. Применяя несколько раз это преобразование, можем довести число тригонометрических множителей под знаком интеграла до одного, и таким образом получим интеграл вида (19).

Пример. Согласно формуле (20):

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx) + C.$$

Дифференцируем и сокращаем на e^{ax}:

$$\sin bx = (aA + bB)\cos bx + (-bA + aB)\sin bx,$$

откуда

$$aA + bB = 0, \quad -bA + aB = 1,$$

т. е.

$$A = -\frac{b}{a^2+b^2}; \quad B = \frac{a}{a^2+b^2},$$

и окончательно:

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\cos bx + \frac{a}{a^2+b^2}\sin bx\right) + C. \qquad (21)$$

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Смирнов Владимир Иванович

Курс высшей математнки, том I

Редактор *Г. П. Акилов*
Техн. редактор *К. М. Волчок*
Корректор *А. И. Исакова*

Подписано к печати с матриц 24/VI 1961 г.
Бумага 60×92$^{1}/_{16}$. Физ. печ. л. 30.
Усл. печ. л. 30. Уч.-изд. л. 32,93.
Тираж 25 000 экз. Цена 1 р. 14 к. Заказ № 451.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский пр., 15.

Ленинградский Совет народного хозяйства.
Управление полиграфической промышленности.
Типография № 1 «Печатный Двор» имени
А. М. Горького. Ленинград, Гатчинская, 26.

С матриц типографии № 1 «Печатный двор»
имени А. М. Горького отпечатано в типографии № 6 УПП Ленсовнархоза, Ленинград,
ул. Моисеенко, 10 Зак. 743

